ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

С. В. ВОНСОВСКИЙ

СОВЕЩАНИЕ ПО НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОМУ МАГНЕТИЗМУ

С 1 по 3 июля 1954 г. Комиссия по магнетизму АН СССР при Уральском филиале АН СССР, Физико-технический институт АН УССР и Институт физических проблем АН СССР им. С. И. Вавилова провели в Харькове Совещание по вопросам низкотемпературного магнетизма.

Это Совещание было вторым в истории советской физики совещанием, посвященным проблеме физики низких температур. На этом Совещании встретились как специалисты в области физики низких температур, так и специалисты по физике магнитных явлений. Поэтому это Совещание было одновременно и магнитным совещанием, на котором впервые основное внимание уделялось, наряду с ферромагнетиками, и другим магнетикам. На Совещании были заслушаны и обсуждены доклады и сообщения о работах по экспериментальному и теоретическому изучению магнитных и гальваномагнитных свойств веществ при низких температурах, выполненных в течение последних 5—6 лет. Большое число участников (свыше 150 человек) — физиков Харькова, Москвы, Свердловска, Ленинграда, Киева и других городов Советского Союза и активное и критическое обсуждение докладов свидетельствовали об успехах, достигнутых советской физикой в области низкотемпературного магнетизма. На пяти пленарных заседаниях Совещания было заслушано 20 докладов.

Доклады по экспериментальным исследованиям были посвящены изложению результатов работ по изучению магнитных, гальваномагнитных, фотомагнитных и тепловых свойств различных слабомагнитных веществ при низких температурах.

В докладе Б. И. Веркина — «Магнитные свойства металлов при низких температурах» был проведен детальный анализ результатов многочисленных исследований харьковской школы физиков по данному вопросу. В работе Б. И. Веркина, Б. Г. Лазарева и Н. С. Руденко (1950) впервые было обнаружено явление сложной периодической зависимости от поля величины и разностей главных удельных магнитных восприимчивостей ($\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$) монокристаллов цинка, кадмия, бериллия, магния, индия, олова, сурьмы, ртути, а также была обнаружена анизотропия магнитных свойств монокристаллов висмута, цинка, бериллия и сурьмы в плоскости базиса. В работе Б. И. Веркина и И. Ф. Михайлова (1953) был разработан совершенный компенсационный метод для измерения величины $\Delta\chi$, а также была обнаружена и детально исследована зависимость этой величины от напряженности магнитного поля H и температуры T в монокристаллах цинка в области температур от комнатной и ниже. Кроме того, была обнаружена «сверхтонкая структура» зависимости $\Delta\chi$ от поля H у монокристаллов бериллия (в интервале полей $1500 \div 20\,000$ Ое при $T \sim 2°$ К). Сравнение опытных данных по «сверхтонкой структуре» с теорией Л. Д. Ландау дает для числа электронов на атом величину $3{,}5 \cdot 10^{-2}$ (расчет, произведенный с учетом данных Е. С. Боровика по измерению гальваномагнитных эффектов, дает величину $4 \cdot 10^{-2}$). Веркиным и Михайловым был детально исследован монокристалл магния. Анализ осцилляционных кривых в полях до 20 000 Ое при $T = 4{,}2°$ К показал наличие двух близких частот осцилляций. В докладе отмечались большие трудности, с которыми пришлось встретиться

авторам при попытке провести гармонический анализ опытных осцилляционных кривых $\Delta\chi$ (H). В работе Б. И. Веркина и И. М. Дмитренко* был исследован монокристалл цинка; зависимость $\Delta\chi$ от H исследовалась в нем для шестнадцати различных кристаллографических направлений, в интервале полей 1 500 ÷ 20 000 Ое и при температурах 1,5 ÷ 4,2° К. Была обнаружена тонкая структура зависимости $\Delta\chi$ от H — наличие двух сильно различающихся частот. Выяснена зависимость периода каждой компоненты от угла между полем и главной осью кристалла, или, иначе, зависимость максимальных сечений поверхности Ферми для двух групп электронов, перпендикулярных к вектору **H**, от угла, образуемого вектором **H** с главной остью кристалла. Показано, что для «основной» (низкой) частоты соотношение эффективных масс таково: $m_3 \gg m_1$, в то время как для высокой частоты «тонкой» структуры $m_3 \ll m_1$. Эти выводы, по мнению докладчика, свидетельствуют в пользу реальности существования различных «групп» электронов, участвующих в явлении сложной периодической зависимости магнитной проницаемости от поля.

Доклад Б. И. Веркина вызвал оживленную дискуссию, особенно по вопросам теоретической интерпретации тонкой и сверхтонкой структуры осцилляций магнитной проницаемости.

Большой интерес у участников Совещания вызвал доклад Е. С. Боровика о результатах исследований на тему: «Гальваномагнитные явления и свойства электронов проводимости в металлах». Еще со времени фундаментальных работ П. Л. Капицы (1929) по исследованию явления возрастания электросопротивления металлов в магнитных полях до $3 \cdot 10^5$ Ое было обнаружено, что эффект значительно увеличивается с понижением температуры. Например, для висмута в более поздних исследованиях при температуре 2—4° К и в полях порядка $3 \cdot 10^4$ Ое удельное электросопротивление возрастает в 10^6 раз. Этот рост связан, в первую очередь, с тем, что с понижением температуры увеличивается время свободного пробега электронов проводимости (это эквивалентно возрастанию возмущающего действия внешнего магнитного поля, т. е. возрастанию его эффективной величины). Исследованные металлы, оказывается, можно разделить на два класса: 1) металлы с неограниченным возрастанием сопротивления в магнитном поле (кадмий, галлий, висмут, вольфрам и др.) и 2) металлы, у которых это возрастание обнаруживает эффект насыщения (алюминий, индий, натрий и др.). Для объяснения этих явлений было привлечено представление о смешанной проводимости (электронной и дырочной), а также о влиянии эффекта Холла. Однако исследования эффекта Холла и изменения электросопротивления в магнитном поле, как правило, велись отдельно друг от друга, и взаимосвязь этих явлений не исследовалась. Комплексному исследованию этих явлений и анализу их взаимосвязи при низких температурах у чистых металлов и были посвящены работы автора, о результатах которых он докладывал на Совещании. Исследовались металлы: медь, бериллий, магний, цинк, алюминий, индий, олово и свинец. Автор подчеркивает, что для металлов с резко возрастающим в магнитном поле электросопротивлением постоянная Холла уже не является постоянной, а зависит сложным образом от магнитного поля и других переменных; поэтому в качестве характеристики эффекта Холла в этих случаях целесообразно выбрать отношение величины поля Холла E_y к величине поля в направлении тока E_x, т. е. E_y/E_x. В таких веществах, как бериллий, магний, цинк, кадмий, свинец, олово, графит и висмут, величина E_y/E_x с увеличением H переходит через максимум и затем убывает в больших полях. В алюминии, индии, меди, натрии величина E_y/E_x в больших полях неограниченно возрастает. Вместе с тем у первой из этих групп изменение электросопротивления $\Delta\rho/\rho$ в поле растет с увеличением H неограниченно, а у второй —

* См. настоящий номер журнала, стр. 409.

$\Delta\rho/\rho$ стремится с увеличением H к некоторому пределу. Кроме того, автор обнаружил более тонкие черты обоих явлений (анизотропия, квантовые осцилляции и др.), между которыми установлена закономерная связь.

Во второй части доклада автор провел подробный анализ сравнения результатов опытов с квантовой теорией металлов. В основном теоретическое объяснение основывается на работе Д. И. Блохинцева и Л. Нордгейма (1933) и ее дальнейшем развитии. Получено качественное совпадение между выводами теории и результатами опытов. Однако при этом сравнении возник ряд трудностей. Для преодоления этих затруднений автор предлагает при помощи усложнения теоретической модели металла ввести гипотезу о существовании нескольких (двух) групп «дырок» в некоторых металлах. Эта гипотеза не противоречит существующим представлениям зонной одноэлектронной теории о структуре энергетических полос и зон состояний, например в металлах с гексагональной симметрией. В заключение доклада было проведено сравнение экспериментальных результатов автора с результатами других экспериментальных исследований иных свойств электронов проводимости (определение длины свободного пробега, измерение электронной теплоемкости, отклонения от закона Ома).

Доклад Е. С. Боровика вызвал оживленный обмен мнениями. Особое внимание было обращено на необходимость дальнейшей разработки квантовой теории металлов, преодоления ограниченности одноэлектронной модели путем развития многоэлектронной теории, основанной на методе элементарных возбуждений. Отмечалась также важность и необходимость комплексных исследований большой совокупности физических свойств металлов.

В докладе Н. Е. Алексеевского и Н. Б. Брандта — «Влияние всестороннего сжатия на гальваномагнитные эффекты в висмуте и его сплавах» было отмечено, что обнаруженное и исследованное ими явление смещения критической температуры $T_к$ в ряде сверхпроводящих сплавов из несверхпроводящих компонентов под влиянием всестороннего сжатия позволило установить наличие двух знаков изменения $T_к$ при изменении давления p. Например, в бедных висмутом сплавах $\partial T_к/\partial p < 0$, а в богатых висмутом сплавах $\partial T_к/\partial p > 0$. Существование двух знаков величины $\partial T_к/\partial p$ в сверхпроводниках объясняется, по мнению авторов, влиянием плотности электронов проводимости на характер смещения $T_к$ при упругой деформации. Из работ Е. С. Боровика (предыдущий доклад) вытекает, что исследование гальваномагнитных явлений у чистых металлов позволяет получить ряд сведений о параметрах, характеризующих электроны проводимости в металлах. Поэтому представляло интерес исследовать влияние всестороннего сжатия на гальваномагнитные эффекты у сверхпроводящих сплавов и их компонентов. Измерения проводились на образцах монокристаллов в форме шариков или на поликристаллических пластинках. Давление создавалось в бомбе постоянного объема путем замораживания воды по методу, разработанному Б. Г. Лазаревым с сотрудниками. В результате исследования было обнаружено сильное обратимое влияние всестороннего сжатия на гальваномагнитные явления и температурную зависимость электросопротивления висмута. Влияние всестороннего сжатия на гальваномагнитные явления обнаружено также у ряда сверхпроводящих интерметаллических соединений висмута.

При обсуждении доклада наиболее горячая дискуссия разгорелась в связи с теоретической интерпретацией результатов экспериментов авторов. Здесь также была подчеркнута насущная необходимость дальнейшего развития многоэлектронной теории металлов.

Доклад А. П. Комара, Н. М. Рейнова и С. С. Шалыта — «Фотомагнитный эффект в кристаллах закиси меди при низких температурах» был посвящен изложению результатов дальнейшего экспериментального исследования эф-

фекта Кикоина — Носкова. Работы И. К. Кикоина и сотрудников показали, что зависимость фотомагнитной эдс от магнитного поля H при $T = 77°$ К растет линейно вплоть до полей порядка $4 \cdot 10^3$ Ое. Теория предсказывает, что эта линейная зависимость должна иметь место лишь при условии $\left(\frac{\mu H}{c}\right)^2 \ll 1$ (где μ — подвижность носителей тока, а c — скорость света). Поэтому представляло интерес исследовать этот эффект для случая $\left(\frac{\mu H}{c}\right)^2 \sim 1$. Опыты проводились при $T = 77°$ К и 4,2° К до полей порядка $25 \cdot 10^3$ Ое. Они показали, что кривая зависимости фотомагнитной эдс от поля при $T = 77°$ К нелинейна уже при напряженности поля в 10^4 Ое, а при $T = 4{,}2°$ К — при $4 \cdot 10^3$ Ое. Полученные результаты дают возможность по ходу зависимости фотомагнитной эдс от магнитного поля оценить подвижность носителей тока.

В дискуссии отмечалась желательность продолжения этих исследований для большой совокупности разнообразных полупроводников.

В докладе А. С. Боровика-Романова, М. П. Орловой и П. Г. Стрелкова — «Магнитные и тепловые свойства конденсированного кислорода» были изложены результаты измерений магнитной восприимчивости твердого кислорода в интервале $14 \div 80°$ К, которые показали, что магнитные свойства γ-модификации твердого кислорода и жидкого кислорода очень сходны. Магнитная восприимчивость β-модификации твердого кислорода падает с понижением температуры. Это обстоятельство, наряду со значительной по абсолютной величине отрицательной постоянной Кюри, наблюдаемой у кислорода при более высоких температурах, говорит в пользу того, что две низкотемпературные модификации твердого кислорода являются антиферромагнитными. Кроме магнитных измерений, авторами были также проведены калориметрические исследования характера фазовых переходов. Результаты этих исследований, а также рассмотрение кривой теплоемкости позволяют сделать предположение, что переход из α- в β-модификацию твердого кислорода является переходом второго рода. Антиферромагнетизм в твердом кислороде возникает при переходе из γ- в β-модификацию, который является переходом первого рода со значительной перестройкой кристаллической решетки.

В дискуссии отмечалась желательность дальнейших магнитных исследований различных модификаций твердого кислорода с целью более детального изучения антиферромагнитных свойств этого элемента.

В докладе А. С. Боровика-Романова и Н. М. Крейнес — «Магнитные свойства трехвалентных европия и самария» излагались результаты исследований авторов по температурной зависимости магнитной восприимчивости соединений Eu_2O_3 и Sm_2O_3 в интервале температур $11 \div 300°$ К и в магнитных полях до $6 \cdot 10^3$ Ое на специально разработанных для этой цели магнитных весах большой чувствительности. Значения восприимчивости измерялись через каждые 5—10°, что позволило достаточно надежно выявить форму кривой температурной зависимости. Полученные данные для Eu_2O_3 достаточно хорошо совпадают с теорией ван-Флека и позволяют определить величину мультиплетного расщепления для ионов Eu^{+++}. В случае Sm_2O_3 согласие с теорией носит более качественный характер, и при низких температурах количественные расхождения между теорией и опытом очень велики. Возможно, что эти расхождения объясняются влиянием примесей и кристаллических электрических полей на магнитные свойства ионов.

Доклад М. О. Кострюковой — «Исследование теплоемкости и температурной зависимости магнитной восприимчивости безводного хлористого марганца ниже 4,2° К» был посвящен изложению результатов работы автора, обнаружившей антиферромагнетизм этого соеди-

нения в интервале температур 4,2 ÷ 1,4° К. На кривой зависимости теплоемкости от температуры была обнаружена аномалия с максимумом теплоемкости при 1,96° К. Эта аномалия связывается автором с переходом вещества из парамагнитного в антиферромагнитное состояние, что подтверждается также измерениями температурной зависимости магнитной восприимчивости в этой же области температур, для которой был обнаружен максимум в интервале 1,6÷1,95° К. Из опытных данных автором было оценено увеличение энтропии перехода от полностью упорядоченного антиферромагнитного состояния к полностью неупорядоченному парамагнитному состоянию; эта величина оказалась равной 13,1 ± 1,1 J моль$^{-1}$ град$^{-1}$ (теоретическое значение равно 14,86 J моль$^{-1}$ град$^{-1}$).

В оживленной дискуссии по последним трем докладам особенно подробно был обсужден вопрос (И. М. Лифшицем и другими) о характере аномалий различных физических величин при фазовых переходах второго рода. Отмечалось, что вывод статистико-термодинамической теории Л. Д. Ландау (в предположении об аналитическом характере зависимости термодинамического потенциала от термодинамических переменных вблизи точки фазового перехода) о конечности «скачков» требует в связи с последними работами Онзагера и др. более детального рассмотрения. В выступлениях также отмечалось, что по мере увеличения точности измерений величин, испытывающих «скачки» при фазовом переходе второго рода, высота максимума аномалии заметно возрастает, что также является косвенным подтверждением бесконечной величины скачка, которая для частного случая линейной цепочки и плоской решетки была предсказана теоретически.

Доклады по вопросам теоретической физики, связанным с низкотемпературным магнетизмом, были посвящены общей квантовомеханической теории конденсированных систем (метод квази-частиц), квантовой теории осцилляций магнитной восприимчивости в слабомагнитных металлах, теории магнитной восприимчивости в тонких металлических слоях при низких температурах, теории аномального скин-эффекта в магнитном поле для слабомагнитных металлов, а также теории этого эффекта в ферромагнетиках; серия докладов была посвящена теории электронных релаксационных эффектов при низких температурах в ферромагнитных диэлектриках и ферромагнитных металлах, теории магнитного охлаждения, вопросу кинетики намагничивания растворов He^3 в He^4, теории температурной зависимости самопроизвольной намагниченности металлов и сплавов в области низких температур, а также вопросам теории магнитных свойств антиферромагнетиков, рассеяния нейтронов в ферромагнетиках и теории тепловых свойств ферромагнитных тел.

В докладе С. В. Вонсовского — «Некоторые вопросы квантовомеханической теории кристаллов при низких температурах» были изложены общие положения метода квази-частиц и приведена иллюстрация этого метода на конкретных примерах различных задач многоэлектронной теории кристаллов (ферромагнетизм переходных металлов, полупроводники и т. п.).

По докладу было задано много вопросов и развернулись прения. Были отмечены трудности, возникающие при трактовке систем взаимодействующих микрочастиц, особенно в связи с задачей диагонализации оператора энергии многоэлектронной системы (И. М. Лифшиц), в ходе которой имеется опасность получить расходящиеся результаты, обесценивающие весь расчет. Вместе с тем в прениях было подчеркнуто, что метод квази-частиц представляет собой весьма плодотворное направление исследований в современной атомной теории систем взаимодействующих микрочастиц. Детальному обсуждению был подвергнут также вопрос о статистике элементарных возбуждений, о различии между статистикой исходных частиц системы и квази-частиц, о характере кинетических процессов с квази-частицами и ряд других конкретных вопросов.

В докладе И. М. Лифшица, А. В. Погорелова и А. М. Косевича — «К теории магнитной восприимчивости металла при произвольном законе дисперсии» было отмечено, что электроны проводимости металлов, взаимодействующие друг с другом и с ионной решеткой, при низких температурах в термодинамическом отношении эквивалентны идеальному газу фермиевских квази-частиц со сложным законом дисперсии, дающим связь их энергии (частоты) с квази-импульсом (волновым вектором). Поэтому для изучения электронного диамагнетизма металлов при низких температурах следует построить термодинамические потенциалы и найти магнитный момент такого газа во внешнем магнитном поле. Авторами были определены квази-классические уровни энергии квази-частиц с произвольным законом дисперсии в магнитном поле, вычислены термодинамические потенциалы, и найдена магнитная восприимчивость фермиевского газа с учетом спинового парамагнетизма. Были определены амплитуды и периоды осцилляций восприимчивости, которые выражаются через характеристики граничной энергии для поверхности Ферми квази-частиц; проанализирована роль различных групп электронов в эффекте осцилляции и рассмотрены предельные случаи полученных формул. Кроме того, была сделана попытка определения формы поверхности Ферми и скоростей электронов в металле на основании зависимости периода и амплитуд осцилляций магнитного момента от направления магнитного поля. Получены простые формулы, выражающие форму поверхности через периоды осцилляций; показано, что определение температурной зависимости амплитуды осцилляций дает возможность определить скорость электронов.

При обсуждении доклада особое внимание было обращено на преимущество метода квази-частиц при трактовке электрических и магнитных свойств металлов.

В докладе Г. Е. Зильбермана — «Анализ осцилляционных эффектов в магнитном поле на основании допущения о квадратичном законе дисперсии» было изложено содержание ряда теоретических исследований автора. В докладе подчеркивалось, что приближение квадратичного закона не является специфическим для модели свободных электронов, но может быть с равным правом использовано и в рамках зонной одноэлектронной схемы, а также и в многоэлектронных задачах. В последнем случае закон дисперсии относится к квази-частицам системы электронов. Теория, основанная на квадратичном законе дисперсии, дает в различных областях температур и напряженностей магнитного поля качественно ту же картину, что и эксперимент. Однако с количественной стороны возникают трудности в связи с аномально малыми значениями предельной энергии Ферми и эффективной массы квази-частиц. Эта трудность должна быть устранена при дальнейшем развитии теории.

По докладу было задано большое число вопросов, в выступлениях отмечалось, что желательно дальнейшее развитие этих исследований, важных для физики металлов при низких температурах.

Доклад И. М. Лифшица и А. М. Косевича — «О магнитной восприимчивости тонких слоев металла при низких температурах» был посвящен изложению работы по изучению влияния размеров и формы образца на осцилляции магнитной восприимчивости металла. Это влияние существенно сказывается при толщине слоя, сравнимой с радиусом ларморовской орбиты электрона, и проявляется в зависимости периода и амплитуд осцилляций восприимчивости от размеров (толщины слоя). В работе найдены выражения для магнитного момента тонкого слоя металла как для случая квадратичного, так и для произвольного закона дисперсии.

Доклад М. Я. Азбеля и М. И. Каганова — «К теории аномального скин-эффекта в магнитном поле» был

посвящен изложению работы авторов по изучению влияния магнитного поля на величину поверхностного импеданса металлов. Показано, что в области аномального скин-эффекта импеданс не зависит от магнитного поля. В случае резонанса отраженная волна эллиптически поляризована, а металл характеризуется двумя коэффициентами отражения, причем один соответствует нормальному, а другой — аномальному скин-эффекту.

В докладе А. В. Соколова и Р. Зигенлауб — «Об особенностях аномального скин-эффекта в ферромагнитных металлах» было подчеркнуто влияние специфики ферромагнитного состояния на особенности аномального скин-эффекта. Учет упругих столкновений между электронами проводимости и ферромагнонами дает возможность получить выражение для поверхностного импенданса ферромагнитных металлов. Получены также выражения для оптических характеристик (показателя преломления, поглощения и т. п.) ферромагнитного металла в близкой инфракрасной и низкочастотной видимой областях спектра.

По последним трем докладам были заданы многочисленные вопросы и развернулись оживленные прения. Доклад Соколова и Зигенлауб был подвергнут серьезной критике (М. И. Каганов) в той его части, где авторы допустили непоследовательность при расчете части импеданса, обусловленного столкновениями электронов с ферромагнонами. Дискуссия по всем докладам выявила необходимость разработки более строгой количественной теории для расчета импеданса в металлах при низких температурах.

Большой обзорный доклад А. И. Ахиезера был посвящен трем работам, относящимся к релаксационным явлениям в конденсированной фазе при низких температурах: 1) «Релаксационные явления в ферромагнитных диэлектриках при низких температурах» (А. И. Ахиезер), 2) «Установление равновесия между спинами и решеткой в магнитном способе охлаждения» (А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук), 3) «Кинетика намагничивания растворов He^3 в He^4» (А. И. Ахиезер и В. Ф. Алексин). В первой из этих работ исследовались релаксационные явления в ферромагнитных диэлектриках, обусловленные столкновением ферромагнонов друг с другом и с фононами решетки. Времена релаксации определялись как функции температуры и ряда характеристических постоянных (температура Дебая, точка Кюри). Во второй работе определялось время установления равновесия между спинами системы электронов и решеткой в магнитном способе охлаждения в зависимости от температуры и других параметров. Показано, что это время достаточно мало. Произведены оценки времени релаксации при использовании ядерного магнетизма для получения сверхнизких температур. В третьей работе определялось время намагничивания слабого раствора He^3 в He^4 в зависимости от температуры и концентрации He^3.

В докладе Е. А. Турова — «Релаксационные явления в ферромагнитных металлах при низких температурах» было отмечено, что анализ опытных исследований по релаксационным явлениям в ферромагнитных металлах показывает необходимость учета спин-электронной релаксации, обусловленной столкновениями между ферромагнонами и электронами проводимости. В работе на основе обменной модели взаимодействующих внешних и внутренних электронов ферромагнитных переходных металлов были вычислены времена релаксации для различных типов столкновений между электронами проводимости и ферромагнонами, важнейшую роль среди которых играют процессы столкновений, обусловленные спин-орбитальным взаимодействием внешних и внутренних электронов ферромагнетика. Исследование процесса установления равновесия в системе ферромагнонов и электронов проводимости приводит к выводу, что спин-электронная релаксация может в значительной мере определять ширину линии ферромагнитного резонансного поглощения. Принятая схема расчета дает возможность произвести также вычисление температурной зависимости дополни-

тельного электросопротивления ферромагнитных металлов, обусловленного столкновениями электронов проводимости с ферромагнонами, которое оказывается пропорциональным первой степени температуры и, следовательно, при достаточно низких температурах может стать больше, чем электросопротивление, обусловленное столкновениями электронов проводимости с фононами решетки.

По докладам А. И. Ахиезера и Е. А. Турова были заданы многочисленные вопросы и развернулись оживленные прения, в ходе которых была отмечена необходимость дальнейшей разработки теории релаксационных процессов, особенно в металлических ферромагнетиках и антиферромагнетиках.

В докладе Е. И. Кондорского и А. С. Пахомова — «К теории температурной зависимости самопроизвольной намагниченности металлов и сплавов в области низких температур» было изложено содержание работы авторов, в которой проведено обобщение квантовой теории ферромагнетизма на случай металлов, каждый атом которых имеет в незаполненной электронной оболочке не один, а несколько электронов с нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами. Авторами была получена формула для температурной зависимости самопроизвольной намагниченности ферромагнетика указанного типа в области низких температур для случая двух электронов на атом. Указан способ приближенного решения общей задачи (когда в оболочке больше двух электронов), и проанализирован характер температурной зависимости самопроизвольной намагниченности в этом общем случае. Выведены формулы этой зависимости для упорядоченных бинарных ферромагнитных сплавов с одинаковым или разным числом электронов с нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами у атомов каждого из компонентов сплава.

В прениях по докладу особое внимание было уделено вопросу об оценках величины и о возможности опытного определения добавочных членов в выражении для самопроизвольной намагниченности, рассчитанных в обсуждаемой работе.

Доклад К. Б. Власова был посвящен теме «Анизотропия восприимчивости и магнетокалорический эффект в антиферромагнетиках». В этой работе методом энергетического центра тяжести с учетом магнитного диполь-дипольного взаимодействия была вычислена свободная энергия монокристалла магнитно-одноосного антиферромагнетика, из которой удалось определить анизотропию магнитной восприимчивости, а также ее зависимость от температуры и поля для широкого интервала полей и для температур вплоть до антиферромагнитной точки Кюри. Полученные закономерности позволили определить температурную зависимость критического поля (выше которого начинается уменьшение степени анизотропии магнитной восприимчивости), а также дать теоретическое объяснение явлению анизотропии антиферромагнитной точки Кюри и вычислить магнетокалорический эффект для антиферромагнетика.

Доклад вызвал много вопросов и его обсуждение показало насущную необходимость резкого увеличения как теоретических, так и экспериментальных работ по изучению явлений антиферромагнетизма.

В докладе Л. М. Шишкина — «Тепловые свойства ферромагнитных диэлектриков» были изложены расчеты автора по определению теплоемкости и теплопроводности ферромагнитных диэлектриков в зависимости от температуры.

Доклад С. В. Малеева — «Рассеяние нейтронов в ферромагнетиках» был посвящен вопросу об определении поперечного сечения рассеяния нейтронов в ферромагнитных кристаллах с испусканием и поглощением ферромагнонов.

По обоим докладам были заданы вопросы и высказаны критические замечания в прениях.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

И. М. ЛИФШИЦ и А. М. КОСЕВИЧ

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ФЕРМИ-ГАЗА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Как известно, квантование уровней энергии электронов в магнитном поле приводит к осцилляциям термодинамических величин для вырожденного электронного Ферми-газа и является причиной периодической зависимости магнитной восприимчивости электронного газа от напряженности поля (эффекта де-Гааза — ван-Альфена) [1]. Очевидно, что аналогичный эффект осцилляционной зависимости термодинамических величин для вырожденного Ферми-газа частиц с квантованными уровнями энергии от тех параметров, которые определяют положение этих уровней, будет иметь место всегда, когда существуют причины, вызывающие квантование уровней (например, ограниченный объем, внешние поля с возрастающим потенциалом и т. д.).

Ниже нами вычисляются осциллирующие члены в термодинамических потенциалах, обусловливающие весь эффект, при весьма общих предположениях относительно энергетического спектра частиц (или квази-частиц), образующих идеальный вырожденный Ферми-газ.

§ 1. Вычисление осциллирующей части термодинамического потенциала Ω

Предположим, что «классическая» задача о движении энергии частицы решена. Тогда энергия этой частицы $\mathcal{E}$ может быть выражена через переменные действия I_i:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(I_1, I_2, I_3). \tag{1}$$

Поскольку при низких температурах осцилляции термодинамических величин определяются энергетическим спектром вблизи граничной энергии Ферми, то нас будут интересовать лишь высокие уровни энергии, и потому для квантования движения частицы можно воспользоваться квази-классическим приближением. Квази-классическое квантование системы с несколькими степенями свободы, совершающей финитное движение, дается условием [2]:

$$I_i = (n_i + \gamma_i)h, \qquad 0 < \gamma_i < 1, \tag{2}$$

и квантованные уровни энергии E получаются из (1) заменой I_i на $(n_i + \gamma_i)h$:

$$E(\mathbf{n}) = \mathcal{E}[(n_1 + \gamma_1)h,\ (n_2 + \gamma_2)h,\ (n_3 + \gamma_3)h],$$

(через $\mathbf{n}$ мы обозначили вектор с целочисленными компонентами n_1, n_2, n_3).

Термодинамический потенциал Ω, которым удобно пользоваться для вычисления термодинамических величин, дается формулой:

$$\Omega = -\theta \sum_{\mathbf{n}} \ln\{1 + e^{[\zeta - E(\mathbf{n})]/\theta}\},$$

где $\theta = kT$, ζ — химический потенциал, и суммирование производится по всем возможным значениям $\mathbf{n}$.

Для выделения осциллирующей части Ω воспользуемся трехмерным аналогом формулы Пуассона, заменяющим суммирование по $\mathbf{n}$ интегрированием:

$$\Omega = \int f[\zeta - E(\mathbf{n})]\, d\mathbf{n} + 2\,\mathrm{Re}\sum_{\mathbf{k}} \mathscr{L}_{\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{1}{\hbar^3}\int f[\zeta - \mathscr{E}(I_1, I_2, I_3,)]\, dI_1\, dI_2\, dI_3 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{\mathbf{k}} \mathscr{L}_{\mathbf{k}}, \qquad (3)$$

где

$$f(x) = -\theta \ln(1 + e^{x/\theta}).$$

Под вектором $\mathbf{k}$ следует понимать совокупность трех целочисленных индексов: k_1, k_2, k_3; суммирование по $\mathbf{k}$ производится по всем неотрицательным значениям k_1, k_2, k_3, за исключением $\mathbf{k} = 0$. Через $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$ обозначен следующий интеграл:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{k}} = \int f[\zeta - E(\mathbf{n})]\, e^{2\pi i \mathbf{k}\mathbf{n}}\, d\mathbf{n}.$$

Осциллирующая часть Ω заключена во втором слагаемом выражения (3).

Прежде чем перейти к вычислению входящих в (3) интегралов $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$, заметим, что интегрирование по $\mathbf{n}$ производится только в первом октанте (от $n_i = 0$ до $n_i = \infty$). В силу этого, за счет разрыва подинтегральной функции на границе области интегрирования, наряду с трехмерными интегралами $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$, в результат войдут двухмерные и одномерные интегралы. Поэтому расчетная формула для осциллирующей части Ω имеет вид:

$$\Omega_{\text{осц}} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\mathbf{k}}{}' \mathscr{L}_{\mathbf{k}} + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k_1k_2}{}' P_{k_1k_2} + \sum_{k_1k_3}{}' P_{k_1k_3} + \sum_{k_2k_3}{}' P_{k_2k_3}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{k_1}{}' Q_{k_1} + \sum_{k_2}{}' Q_{k_2} + \sum_{k_3}{}' Q_{k_3}\right\}, \qquad (4)$$

где двухмерный интеграл $P_{k_1k_2}$ определяется следующим образом:

$$P_{k_1k_2} = \iint f[\zeta - E(n_1, n_2, 0)]\, e^{2\pi i (k_1n_1 + k_2n_2)}\, dn_1 dn_2,$$

и аналогично определяются $P_{k_1k_3}$ и $P_{k_2k_3}$, а одномерные интегралы Q_{k_1}, Q_{k_2}, Q_{k_3} даются выражениями типа:

$$Q_{k_1} = \int f[\zeta - E(n_1, 0, 0)]\, e^{2\pi i k_1 n_1}\, dn_1.$$

Штрих у знака суммы (Σ') в выражении (4) означает, что при суммировании по всем указанным индексам от 0 до ∞ исключается слагаемое с $\mathbf{k} = 0$ $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$.

Интеграл $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$, очевидно, можно преобразовать к виду:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{k}} = \int f(\zeta - E)\left\{\int\limits_{\substack{E(\mathbf{n})=E \\ n_i \geqslant 0}} \frac{e^{2\pi i \mathbf{k}\mathbf{n}}\, d\Omega_{\mathbf{n}}}{|\nabla E(\mathbf{n})|}\right\} dE,$$

где через $d\Omega_{\mathbf{n}}$ обозначен элемент поверхности постоянной энергии:

$$E(\mathbf{n}) = E, \qquad (5)$$

в направлении $\mathbf{n}$. Интегрирование в поверхностном интеграле в фигурных скобках производится по той части поверхности постоянной энергии (5), которая находится в первом октанте.

Используя исходное предположение о больших квантовых числах ($\mathbf{kn} \gg 1$), можно получить асимптотическую оценку интеграла $\mathscr{L}_\mathbf{k}$ [3]:

$$\mathscr{L}_\mathbf{k} \approx \int dE f(\zeta - E) \sum_\nu \frac{\exp\{2\pi \mathbf{k}\mathbf{n}i_\nu \pm i\pi/4 \pm i\pi/4\}}{|\mathbf{k}|\,|\nabla E(\mathbf{n}_\nu)|\sqrt{|K_\nu(E)|}};$$

через $\mathbf{n}_\nu = \mathbf{n}_\nu(\mathbf{k}, E)$ здесь обозначены радиусы-векторы в пространстве $\mathbf{n}$ тех точек на поверхности (5), в которых направление нормали к поверхности параллельно $\mathbf{k}$; $K_\nu(E)$ — гауссова кривизна поверхности в этих точках; суммирование производится по всем подобным точкам в первом октанте. Фазы $i\pi/4$ входят в экспоненту с одинаковыми знаками, если точка $\mathbf{n}_\nu$ является эллиптической, причем фазы входят со знаком минус, если выпуклость поверхности в данной точке обращена в сторону $\mathbf{k}$, и со знаком плюс, если выпуклость обращена в противоположную сторону. В случае гиперболической точки фазы $i\pi/4$ входят в экспоненту с разными знаками.

В предположении $\partial n_\nu/\partial E \neq 0$ и очевидном условии $\theta \ll \zeta$ основной вклад в осциллирующую часть $\mathscr{L}_\mathbf{k}$ дает интегрирование по окрестности резкой нестационарности функции распределения Ферми df/dE, т. е. по окрестности $E = \zeta$. Учитывая это, разложим $\mathbf{n}_\nu(\mathbf{k}, E)$ в показателе экспоненты по степеням $E - \zeta$ и проинтегрируем:

$$(\mathscr{L}_\mathbf{k})_{\text{осц}} \approx \frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \sum_\nu \frac{\Psi(\lambda_\mathbf{k}) \exp\{2\pi i \mathbf{k}\mathbf{n}_\nu(k, \zeta) \pm i\pi/4 \pm i\pi/4\}}{(\mathbf{k}, \partial\mathbf{n}_\nu/\partial\zeta)^2\,|\nabla E(\mathbf{n}_\nu)|\sqrt{|K_\nu(\zeta)|}},$$

$$\Psi(\lambda) = \lambda/\mathrm{sh}\lambda; \quad \lambda_\mathbf{k} = 2\pi^2(\mathbf{k}, \partial\mathbf{n}_\nu/\partial\zeta)\theta.$$

Подобным же образом вычисляются двухмерные и одномерные интегралы. Мы приведем для них окончательные формулы:

$$(P_{k_1k_2})_{\text{осц}} \approx \frac{1}{(2\pi)^2(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}} \times$$

$$\times \sum_\mu \frac{\Psi(\lambda_{k_1k_2}) \exp\{2\pi i(k_1 n_{\mu 1} + k_2 n_{\mu 2}) \pm i\pi/4\}}{\left(k_1 \frac{\partial n_{\mu 1}}{\partial\zeta} + k_2 \frac{\partial n_{\mu 2}}{\partial\zeta}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial E}{\partial n_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial n_2}\right)^2\right]^{1/2} \sqrt{|K_{12\mu}(\zeta)|}};$$

$$\lambda_{k_1k_2} = 2\pi^2\theta\left(k_1 \frac{\partial n_{\mu 1}}{\partial\zeta} + k_2 \frac{\partial n_{\mu 2}}{\partial\zeta}\right);$$

здесь через $n_{\mu i}(\zeta) = n_{\mu i}(k_1, k_2, \zeta)$ мы обозначили координаты тех точек на плоской кривой

$$E(n_1, n_2, 0) = \zeta, \tag{6}$$

в которых направление нормали к кривой параллельно двухмерному вектору (k_1, k_2); $K_{12\mu}(\zeta)$ — кривизна кривой (6) в этих точках; суммирование производится по всем подобным точкам в первом квадранте. Фаза $i\pi/4$ входит в экспоненту со знаком минус, если в точке $(n_{\mu 1}, n_{\mu 2})$ выпуклость кривой (6) обращена в сторону (k_1, k_2); если же выпуклость кривой обращена в противоположную сторону, то фаза $i\pi/4$ входит со знаком плюс:

$$(Q_{k_1})_{\text{осц}} \approx \frac{\Psi(\lambda_{k_1})}{(2\pi k)^2\,\partial n_1/\partial\zeta} e^{2\pi i k_1 n_1(\zeta)};$$

$$\lambda_{k_1} = 2\pi^2\theta(k_1\,\partial n_1/\partial\zeta);$$

здесь через $n_1(\zeta)$ обозначено то значение n_1, при котором $E(n_1, 0, 0) = \zeta$.

Аналогичный вид имеют формулы для $P_{k_1k_3}$, $P_{k_2k_3}$ и Q_{k_2}, Q_{k_3}.

Подставляя найденные асимптотические выражения для $\mathscr{L}_k$, P и Q в (4), мы получим осциллирующую часть Ω. Оказывается, что $\Omega_{осц}$ содержит несколько слагаемых, каждое из которых имеет свой период осцилляций. Периоды осцилляций отдельных слагаемых в $\Omega_{осц}$ можно определить, зная зависимость аргументов соответствующих экспонент от параметров, определяющих положение уровней энергии. Следут заметить, что поскольку отношение периодов разных слагаемых может быть, вообще говоря, произвольным, то при наличии нескольких слагаемых одного порядка величины в (4) осцилляции принимают очень сложный вид.

Решение «классической» задачи о нахождении энергии частицы в виде (1) в общем случае связано с известными трудностями и легко осуществляется только при разделяющихся переменных.

Мы приведем простейшие примеры, в которых можно до конца вычислить осциллирующую часть термодинамических потенциалов и получить периоды соответствующих осцилляций.

§ 2. Электронный газ в трехмерном потенциальном ящике

Рассмотрим электронный газ с произвольным законом дисперсии:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(p_1, p_2, p_3) \tag{7}$$

в бесконечно высоком прямоугольном потенциальном ящике с размерами по осям L_1, L_2, L_3. Как известно, условия (2) в этом случае сводятся к

$$2p_i L_i = n_i h,$$

поэтому квантованные уровни энергии имеют вид:

$$E(\mathbf{n}) = \mathscr{E}\left(\frac{n_1 h}{2L_1}, \frac{n_2 h}{2L_2}, \frac{n_3 h}{2L_3}\right). \tag{8}$$

Производя вычисление по приведенным в § 1 формулам с использованием (8), можно получить все слагаемые осциллирующей части термодинамического потенциала Ω (для учета двух возможных ориентаций спина электрона правую часть формулы для Ω следует дополнительно умножить на 2). При этом оказывается, что если исключить аномально большую анизотропию граничной поверхности $\mathscr{E}(\mathbf{p}) = \zeta$, то для $L_1 \approx L_2 \approx L_3 = L$ по порядку величины справедливо соотношение

$$\frac{\mathscr{L}_k}{P} \approx \frac{P}{Q} \approx L^{1/2} \Big/ \left(\frac{h\,\partial^2\mathscr{E}/\partial p^2}{\partial\mathscr{E}/\partial p}\right)^{1/2},$$

где величина $\dfrac{h\,\partial^2\mathscr{E}/\partial p^2}{\partial\mathscr{E}/\partial p}$ равна де-бройлевской длине волны электрона $\lambda_Б$. Считая $L \gg \lambda_Б$, мы можем оставить в выражении для $\Omega_{осц}$ (4) только слагаемые, содержащие $\mathscr{L}_k$. Тогда

$$\Omega_{осц} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3. \tag{9}$$

Здесь

$$\Omega_1 = L_1 L_2 L_3 \frac{1}{\pi^2}\left\{\sum_{\nu}\sum_{k_1=1}^{\infty} \beta^2(\mathbf{k}) \frac{\Psi(\lambda_k)\cos(2\pi k_1 n_{\nu 1} \pm \pi/4 \pm \pi/4)}{V\,|D(k_1, 0, 0)|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu'}\sum_{k_2=1}^{\infty} \ldots + \sum_{\nu''}\sum_{k_3=1}^{\infty} \ldots \right\}.$$

Многоточием под знаком суммы заменены выражения, аналогичные предыдущим членам в фигурной скобке; $\mathbf{n}_\nu(k_1)$ — радиус-вектор точки на граничной поверхности $E(\mathbf{n}) = \zeta$, в которой нормаль к поверхности параллельна вектору с компонентами $(k_1, 0, 0)$. Аналогично определяются $\mathbf{n}_{\nu'}(k_2)$ и $\mathbf{n}_{\nu''}(k_3)$.

$$\Omega_2 = L_1 L_2 L_3 \frac{1}{(2\pi)^2}\left\{\sum_{\mu}\sum_{k_1 k_2=1}^{\infty}\beta^2(\mathbf{k})\frac{\Psi(2\lambda_{\mathbf{k}})\cos[2\pi(k_1 n_{\mu 1} + k_2 n_{\mu 2}) \pm \pi/4 \pm \pi/4]}{\sqrt{|D(k_1, k_2, 0)|}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu'}\sum_{k_1 k_3=1}^{\infty}\ldots + \sum_{\mu''}\sum_{k_2 k_3=1}^{\infty}\ldots\right\},$$

где $\mathbf{n}_\mu(k_1, k_2)$ — радиус-вектор точки, в которой нормаль к граничной поверхности $E(\mathbf{n}) = \zeta$ параллельна вектору с компонентами $(k_1, k_2, 0)$. Аналогично определяются $\mathbf{n}_{\mu'}(k_1, k_3)$ и $\mathbf{n}_{\mu''}(k_2, k_3)$.

$$\Omega_3 = L_1 L_2 L_3 \frac{1}{(3\pi)^2}\sum_{\rho}\sum_{k_1, k_2, k_3=1}^{\infty}\beta^2(\mathbf{k})\frac{\Psi(3\lambda_{\mathbf{k}})\cos(2\pi\mathbf{k}\mathbf{n}_\rho \pm \pi/4 \pm \pi/4)}{\sqrt{|D(k_1, k_2, k_3)|}},$$

где $\mathbf{n}_\rho(k_1, k_2, k_3)$ — радиус-вектор точки, в которой нормаль к граничной поверхности параллельна вектору $\mathbf{k}$:

$$\lambda_{\mathbf{k}} = (2\pi)^2\theta / h\beta(\mathbf{k});$$

$$D(k_1, k_2, k_3) = \begin{vmatrix} \partial^2\mathscr{E}/\partial p_1^2 & \partial^2\mathscr{E}/\partial p_1\partial p_2 & \partial^2\mathscr{E}/\partial p_1\partial p_3 & K_1 L_1 \\ \partial^2\mathscr{E}/\partial p_1\partial p_2 & \partial^2\mathscr{E}/\partial p_2^2 & \partial^2\mathscr{E}/\partial p_2\partial p_3 & k_2 L_2 \\ \partial^2\mathscr{E}/\partial p_1\partial p_3 & \partial^2\mathscr{E}/\partial p_2\partial p_3 & \partial^2\mathscr{E}/\partial p_3^2 & k_3 L_3 \\ k_1 L_1 & k_2 L_2 & k_3 L_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Значения $\lambda_{\mathbf{k}}$ и $D(k_1, k_2, k_3)$ берутся в соответствующих точках на граничной поверхности.

Через $\beta(\mathbf{k})$ мы обозначили отношения

$$\frac{\partial\mathscr{E}/\partial p_1}{k_1 L_1} = \frac{\partial\mathscr{E}/\partial p_2}{k_2 L_2} = \frac{\partial\mathscr{E}/\partial p_3}{k_3 L_3}\beta(\mathbf{k}), \qquad (10)$$

взятые в тех же точках.

В предположении $L_3 \gg L_1 \approx L_2$ выражение (9) для $\Omega_{\text{осц}}$ упрощается. В случае бесконечно большого размера L_3 из (10) следует, что $k_3 = 0$, и потому Ω_3 в (9) исчезает, а в формулах для Ω_1 и Ω_2 остаются только слагаемые с суммами по k_1 и k_2.

Наконец, в предположении $L_2 \approx L_3 \gg L_1$, т. е. в случае электронного газа, заключенного между двумя бесконечно высокими стенками, имеем:

$$\Omega_{\text{осц}} = \Omega_1 =$$
$$= \frac{L_2 L_3}{L_1^2}\cdot\frac{1}{\pi^2}\sum_{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\partial\mathscr{E}/\partial p_1)^2\Psi\left(\frac{4\pi^2 k L_1\theta}{h\partial\mathscr{E}/\partial p_1}\right)}{k^3\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial p_2^2}\cdot\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial p_3^2} - \left(\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial p_2\partial p_3}\right)^2\right|^{1/2}}\cos\left(2\pi k n_{\nu_1} \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}\right). \qquad (11)$$

Приведенные выше формулы для осциллирующей части Ω принимают наиболее простой вид в случае электронного газа с квадратичным законом дисперсии

$$\mathscr{E} = \frac{p^2}{2m} \equiv \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m},$$

помещенного в кубический потенциальный ящик

$$(L_1 = L_2 = L_3 = L).$$

Оказывается, что входящие в (9) слагаемые имеют в этом случае вид:

$$\Omega_1 = \frac{6\zeta}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\Psi\left(2\sqrt{2}\,\pi^2 k\,\frac{\sqrt{m}\,\theta L}{h\sqrt{\zeta}}\right)\sin\left(4\pi k L\,\frac{\sqrt{2m\zeta}}{h}\right);$$

$$\Omega_2 = \frac{6\zeta}{(2\pi)^2}\sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}\frac{1}{(k_1^2+k_2^2)^{3/2}}\Psi\left(4\sqrt{2}\,\pi^2\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,\frac{\sqrt{m}\,\theta L}{h\sqrt{\zeta}}\right)\times$$
$$\times\sin\left(4\pi\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,L\,\frac{\sqrt{2m\zeta}}{h}\right);$$

$$\Omega_3 = \frac{2\zeta}{(3\pi)^2}\sum_{k_1,k_2,k_3=1}\frac{1}{|\mathbf{k}|^3}\Psi\left(6\sqrt{2}\,\pi^2|\mathbf{k}|\,\frac{\sqrt{m}\,\theta L}{h\sqrt{\zeta}}\right)\times$$
$$\times\sin\left(4\pi|\mathbf{k}|\,L\frac{\sqrt{2m\zeta}}{h}\right).$$

В том случае, когда температура газа очень низка или размеры потенциального ящика очень малы, так что $\lambda_{\mathbf{k}} \equiv 2\sqrt{2}\,\pi^2\frac{\sqrt{m}\,\theta L}{h\sqrt{\zeta}} \ll 1$, функцию $\Psi(\lambda_{\mathbf{k}})$ можно заменить единицей. Если же размеры потенциального ящика велики и $\lambda_{\mathbf{k}} \gg 1$, то $\Psi(\lambda_{\mathbf{k}}) \approx 2\lambda_{\mathbf{k}}\,e^{-\lambda_{\mathbf{k}}}$, и в (9) можно оставить только первое слагаемое из суммы для Ω_1:

$$\Omega_{\text{осц}} \approx 24\,\theta L\,\frac{\sqrt{2m\zeta}}{h}\exp\left\{-2\sqrt{2}\,\pi^2\,\frac{\sqrt{m}\,\theta L}{h\sqrt{\zeta}}\right\}\sin\left(4\pi L\,\frac{\sqrt{2m\zeta}}{h}\right).$$

Из последнего выражения видно, что с изменением линейных размеров потенциального ящика термодинамический потенциал Ω осциллирует с периодом

$$\Delta L = \frac{h}{2\sqrt{2m\zeta}},$$

который не зависит от величины L. Заметим, что указанный период совпадает с длиной полуволны де-Бройля для электрона на граничной поверхности. Поскольку число полуволн де-Бройля $h/2\sqrt{2m\zeta}$, укладывающихся между потенциальными стенками, определяет номер граничного стационарного состояния, то каждое «колебание» Ω связано с изменением на единицу числа уровней, лежащих ниже граничной энергии.

§ 3. Электронный газ в потенциальном ящике в магнитном поле

Рассмотрим теперь электронный газ с произвольным законом дисперсии (7) в таком же, как и в § 2, потенциальном ящике, помещенном в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси x_3. Если выбрать вектор-потенциал в виде $A_1 = -Hx_2$, $A_2 = A_3 = 0$, то два из условий (2) сводятся к очевидным соотношениям:

$$2p_1 L_1 = n_1 h, \quad 2p_3 L_3 = n_3 h.$$

Третье условие может быть записано [4] в виде:

$$S\left(E, \frac{n_1 h}{2L_1}, \frac{n_3 h}{2L_3}; H\right) = (n_2 + \gamma)\,\frac{ehH}{c}, \qquad (12)$$

где $S(E, p_x, p_z; H)$ — площадь сечения поверхности постоянной энергии

$$\mathcal{E}(P_1, P_2, P_3) = E, \quad p_x - \frac{|e|H}{c} \cdot \frac{L_2}{2} < P_1 < p_x + \frac{|e|H}{c} \cdot \frac{L_2}{2}$$

плоскостью $P_3 = p_z = \text{const}$.

Уровни энергии E даются выражением, вытекающим из (12):

$$E = E(n_1, n_2, n_3; H).$$

Считая размер L_2 малым, можно предположить, что средний диаметр классической орбиты электрона в магнитном поле больше L_2. В таком случае E определяется различными аналитическими выражениями в зависимости от соотношений диаметра кривой $\mathcal{E}(P_1, P_2, p_z) = E$, $p_z = \frac{n_3 h}{2L_3} = \text{const}$ и величины $\left| \frac{n_1 h}{L_1} \pm \frac{eH}{c} L_2 \right|$.

Используя (12) и произведя вычисление по произведенным в § 1 формулам (с учетом спина электрона), мы получим все слагаемые осциллирующие части термодинамического потенциала Ω. Сравнение слагаемых, содержащих $\mathscr{L}_k$, P и Q, показывает, что при $L_1 \approx L_3 = L$ их отношения по порядку величины равны следующему:

$$\frac{\mathscr{L}_k}{P} \approx \frac{P}{Q} \approx \frac{L}{(ch/eH)^{1/2}},$$

где величина $(ch/eH)^{1/2}$ имеет простой физический смысл: она совпадает с радиусом классической орбиты электрона в магнитном поле $r_0(H)$, соответствующим самому низкому уровню энергии ($n_2 = 0$). Действительно, так как для малых p всегда можно ограничиться квадратичным разложением выражения (7), то самые низкие уровни энергии движения электрона в магнитном поле имеют вид: $E_{n_2} = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{ehH}{m^* c}$, где m^* — некоторая эффективная масса, а потому

$$r_0(H) = \frac{c\sqrt{2m^* E_0}}{eH} = \left(\frac{ch}{eH}\right)^{1/2}.$$

Предполагая, что $L \gg r_0(H)$, мы можем, как и в § 2, оставить в $\Omega_{\text{осц}}$ только слагаемые, содержащие $\mathscr{L}_k$:

$$\Omega_{\text{осц}} = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} + \Omega^{(3)};$$

здесь

$$\Omega^{(1)} = L_1 L_3 \left(\frac{eH}{c}\right)^2 \frac{4}{\pi^2} \sum_m \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\Psi(\lambda_{k_2}) \cos\left[\frac{2\pi k_2 c S_m(H)}{ehH} \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} - 2\pi k_2 \gamma\right]}{k_2^3 \, \Phi(\zeta, \mathrm{n}_m)},$$

$\mathrm{n}_m(H)$ — радиус-вектор точки, в которой $S(\zeta, p_x, p_z; H)$ имеет экстремальное значение $S_m(H)$ при постоянном ζ: $\partial S/\partial p_x|_m = \partial S/\partial p_z|_m = 0$; нормаль к поверхности

$$E(n_1, n_2, n_3; H) = \zeta \tag{13}$$

в этой точке параллельна оси n_2;

$$\Omega^{(2)} = L_1 L_3 \left(\frac{eH}{c}\right)^2 \frac{1}{\pi^2} \left\{ \sum_{\mu} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^3} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{\Psi(2\lambda_{k_2}) \cos\left[2\pi(k_1 n_{\mu 1} + k_2 n_{\mu 2}) \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}\right]}{\Phi[\zeta, \mathrm{n}_\mu(k_1, k_2)]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu'} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^3} \sum_{k_3=1}^{\infty} \frac{\Psi(2\lambda_{k_2}) \cos\left[2\pi(k_3 n_{\mu' 3} + k_2 n_{\mu' 2} \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}\right]}{\Phi[\zeta, \mathrm{n}_{\mu'}(k_3, k_2)]} \right\};$$

$\mathbf{n}_\rho(k_1, k_2; H)$ — радиус-вектор точки, в которой нормаль к поверхности (13) параллельна вектору $(k_1, k_2, 0)$; аналогично определяется $\mathbf{n}_{\rho'}(k_3, k_2; H)$;

$$\Omega^{(3)} = L_1 L_3 \left(\frac{eH}{c}\right)^2 \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \sum_{\rho} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^3} \sum_{k_1,k_3=1}^{\infty} \frac{\Psi(3\lambda_{k_2}) \cos\left[2\pi\, \mathbf{k}\mathbf{n}_\rho(\mathbf{k}) \pm \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}\right]}{\Phi[\zeta, \mathbf{n}_\rho(\mathbf{k})]};$$

$\mathbf{n}_\rho(\mathbf{k}, H)$ — радиус-вектор точки, в которой нормаль к поверхности (13) параллельна вектору $\mathbf{k}$;

$$\lambda_{k_2} = 2\pi^2 k_2 \frac{c\theta}{ehH}\left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right), \quad \Phi(\zeta, \mathbf{n}) = \left|\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right| \left|\frac{\partial^2 S}{\partial p_x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial p_x \partial p_z}\right)^2\right|^{1/2}.$$

Значения λ_{k_2} и $\Phi(\zeta, \mathbf{n})$ берутся в соответствующих точках.

Следует добавить, что если какая-либо из перечисленных точек лежит в координатной плоскости пространства $\mathbf{n}$, то соответствующее слагаемое умножается на $^1/_2$; если же эта точка лежит на одной из координатных осей, то нужно умножить соответствующее слагаемое на $^1/_4$.

Формула для $\Omega_{\text{осц}}$ упрощается в двух предельных случаях: если $\lambda_{k_2} \ll 1$, то функцию $\Psi(\lambda_{k_2})$ можно заменить единицей; если же $\lambda_{k_2} \gg 1$, то $\Psi(\lambda_{k_2}) \approx 2\lambda_{k_2} e^{-\lambda_{k_2}}$, а потому в суммах по $\mathbf{k}$ следует оставить только первые слагаемые. Последний случай соответствует усиленному неравенству

$$\frac{c\theta}{ehH}\left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right) \gg 1, \tag{14}$$

которому можно придать простой физический смысл. Как следует из (12), среднее расстояние между соседними уровнями энергии с квантовыми числами n_2 и $n_2 + 1$ вблизи граничной энергии равняется

$$\Delta E_{n_2} = \frac{ehH}{c} \Big/ (\partial S / \partial \zeta),$$

а потому неравенству (14) соответствует

$$\zeta \gg \theta \gg \Delta E_{n_2}.$$

При выполнении этого неравенства $\Omega_{\text{осц}}$ состоит из слагаемых вида:

$$\Omega_{\text{осц}} \sim B(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) \cos[2\pi n(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) \pm \pi/4 \pm \pi/4].$$

Амплитуда осцилляций B и фаза $2\pi n$ имеют такой вид для $\Omega^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$:

$$B(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) = L_1 L_2 \frac{16}{j} \cdot \frac{eH\theta}{ch}\left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right) \frac{\exp\left(-j\, 2\pi^2 \frac{c\theta}{ehH} \cdot \frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)}{\Phi(\zeta, \mathbf{n})} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$n = \frac{cS_m(H)}{ehH} - 2\pi\gamma \qquad \text{при } j = 1,$$

$$n = n_{\rho 1}(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) + n_{\rho 2}(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) \qquad \text{при } j = 2,$$

$$n = n_{\rho 1}(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) + n_{\rho 2}(L_1, L_2, L_3; H, \zeta) + n_{\rho 3}(L_1, L_2, L_3; H, \zeta), \qquad \text{при } j = 3.$$

Зависимость фазы $2\pi n$ от напряженности магнитного поля H и от размеров потенциального ящика L_1, L_2, L_3 определяет периоды осцилляций $\Omega_{\text{осц}}$ с изменением этих параметров.

Легко убедиться, что периоды осцилляций слагаемых $\Omega_{\text{осц}}$ с изменением H даются такими выражениями:

1) для $\Omega^{(1)}$

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{eh/c}{|S_m(H)-H\,\partial S_m/\partial H|},$$

2) для $\Omega^{(2)}$

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{eh/c}{2|S(\mathrm{n}_\mu,H)-H\,\partial S_\mu/\partial H|},$$

3) для $\Omega^{(3)}$

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right)=\frac{eh/c}{3|S(\mathrm{n}_\rho,H)-H\partial S_\rho/\partial H|}.$$

Подобным же образом можно получить периоды осцилляций с изменением L_1, L_2, L_3.

Если предположить, что $L_3 \gg L_1$, то нужно считать $k_3=0$, и тогда для $\Omega_{\text{осц}}$ имеет место следующая формула:

$$\Omega_{\text{осц}}=\Omega_1+L_1L_3\left(\frac{eH}{c}\right)^2\frac{1}{\pi^2}\sum_\mu\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{1}{k_2^3}\sum_{k_1=1}^{\infty}\Psi(2\lambda_{k_2})\times$$
$$\times\frac{\cos[2\pi(k_1n_{\mu1}+k_2n_{\mu2})\pm\pi/4\pm\pi/4]}{\Phi[\zeta,\mathrm{n}_\mu(k_2,k_2)]}.$$

Наконец, в предположении $L_1, L_3 \gg L_2$ в формуле для $\Omega_{\text{осц}}$ остается только первое слагаемое (Ω_1):

$$\Omega_{\text{осц}}=\Omega_1=L_1L_3\left(\frac{eH}{c}\right)^2\frac{4}{\pi^2}\times$$
$$\times\sum_m\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{\Psi(\lambda_{k_2})\cos\left[\dfrac{2\pi k_2\,cS_m(H)}{ehH}\pm\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{4}-2\pi k_2\gamma\right]}{k_2^3\Phi(\zeta,\mathrm{n}_m)},\qquad(15)$$

совпадающее с выражением, полученным авторами для случая одномерной бесконечно глубокой потенциальной ямы [4] несколько иным способом *.

Нетрудно проверить, что в предельном случае $H\to 0$ формула (15) переходит в (11).

Физико-технический институт
Академии наук УССР
и
Черновицкий гос. университет

Цитированная литература

1. Peierls R., ZS. f. Phys., **81**, 186 (1933); Ландау Л., Добавление к работе Schoenberg D., Proc. Roy. Soc., **A170**, 341 (1939); Ахиезер А., ДАН СССР, **23**, 872 (1939); Лифшиц И., Косевич А., ДАН СССР, **96**, 963 (1954).
2. Ландау Л., Лифшиц Е., Квантовая механика, ч. I.—ГИТТЛ, М., 1948.
3. Лифшиц И., ЖЭТФ, **18**, 293 (1948).
4. Косевич А., Лифшиц И., ЖЭТФ, **29**, *12* (1955).

* В работе [4] получено непосредственно выражение для осциллирующей части магнитного момента электронного газа $M_{\text{осц}}$. Используя $M=-\partial\Omega/\partial H$ и замечая, что множитель перед косинусом в (15) можно не дифференцировать, легко убедиться в совпадении указанных формул.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

Г. Е. ЗИЛЬБЕРМАН

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. Введение

Если электронный газ* находится в потенциальной яме достаточно малых размеров, чем бы она ни была образована, или в условиях, эквивалентных наличию такой ямы в смысле образования дискретных энергетических уровней, число состояний на интервал энергии окажется величиной, осциллирующей при изменении параметров, характеризующих эту яму. Причина этого состоит в том, что изменение внешних параметров приводит к смещению уровней энергии и к изменению степени вырождения каждого уровня. При пересечении одним из уровней предельной фермиевской энергии E_0 число состояний с энергией от нуля до E_0 скачкообразно изменяется. Такие изменения будут происходить при изменении внешних параметров периодически, поэтому число состояний будет осциллировать. Осцилляция числа состояний приведет, в свою очередь, к осцилляции всех физических величин, зависящих от распределения электронов на квантованных уровнях энергии.

Связь между периодичностью изменения всех этих величин и расстоянием между энергетическими уровнями позволяет опытным путем непосредственно исследовать энергетический спектр электронов в кристалле. Если, как это иногда обнаруживается на опыте, осциллирующая величина может быть представлена в виде суммы осциллирующих величин с различными частотами, то это свидетельствует о сложной структуре энергетического спектра электронов в кристалле, обычно трактуемой как существование «электронных групп» в различных областях K-пространства.

Таким образом, изучение осцилляционных эффектов является одним из самых мощных и тонких средств исследования энергетического спектра электронов.

Наиболее важными из осцилляционных эффектов являются те из них, которые возникают при помещении кристалла в магнитное поле. Как известно [1], энергию свободного электрона в магнитном поле можно записать в виде:

$$E_{nk_3} = \mu H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m}, \qquad (1)$$

где

$$\mu = \frac{e\hbar}{mc}.$$

Расстояние между уровнями равно μH. Эта величина и будет определять период осцилляции.

К числу осциллирующих величин, исследованных теоретически, относятся: магнитная восприимчивость металлов при низких [2—5] и сред-

* Под термином «электронный газ» ниже можно подразумевать Ферми-газ квазичастиц в электронной жидкости.

них [6] температурах, теплоемкость металлов в магнитном поле, электрическое сопротивление [3, 8, 9], поле Холла [9], термо-эдс [9].

Осцилляция магнитной восприимчивости, открытая де-Гаазом и ван-Альфеном [10], наиболее подробно изучена Б. Веркиным, Б. Лазаревым и Н. Руденко [11]. Осцилляции сопротивления обнаружены Л. Шубниковым и де-Гаазом [12], Б. Лазаревым, Н. Нахимовичем и Е. Парфеновой [13]. Осцилляция поля Холла обнаружена Е. Боровиком [14], а осцилляции термо-эдс — авторами работы [15].

2. Закон дисперсии электронов в магнитном поле в различных приближениях

Число состояний определяется законом дисперсии. Поэтому исследование закона дисперсии электронов в магнитном поле составляет одну из наиболее существенных частей теоретического рассмотрения осцилляционных эффектов. В настоящее время исследованы следующие приближения:

а) Совершенно свободные электроны [1], см. формулу (1).

б) Электроны в слабом периодическом электрическом и однородном магнитном полях [16]. Оператор магнитного поля включается в основной гамильтониан, а периодическое поле кристалла рассматривается как возмущение. Для низших уровней зоны энергия такого слабо связанного электрона имеет вид:

$$E_{k_1 n k_3} = \mu^* H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m_3^*} + \sum_{l=1}^{\infty} A \cos\left(4\pi l \frac{\alpha_0^2}{a} k_1\right), \qquad (2)$$

где $\mu^* = \frac{e\hbar}{m^* c}$, m^* и m_3^* — эффективные массы, $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$.

Если не учитывать малого последнего члена, то формула (2) свидетельствует о допустимости применения в рассматриваемом случае метода эффективной массы. Последний член, содержащий волновой вектор k_1, приводит к расширению каждого дискретного уровня энергии, определяемого числом n, в узкую зону. Влияние этого расширения на осцилляции еще не исследовано.

в) Сильно связанные электроны в магнитном поле [17, 9]. В этом случае применяется приближение, совершенно аналогичное обычному приближению Блоха для сильно связанных электронов. Если учитывать только обменное взаимодействие электронов, находящихся на ближайших друг к другу атомах, то энергия движения электрона в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля H, определяется как собственное значение разностного уравнения:

$$(\lambda - 2\cos \varepsilon x)\,\varphi(x) = \varphi(x + \varepsilon) + \varphi(x - \varepsilon), \qquad (3)$$

где $\varepsilon = \frac{a}{\alpha_0}$, a — постоянная решетки.

Для нижних уровней энергетической зоны это уравнение имеет снова решение в форме (1) с эффективными массами, выражающимися через соответствующие обменные интегралы. Для уровней вблизи середины энергетической зоны имеет место расширение в узкие полосы, подобно тому как это получается для слабо связанных электронов.

г) Полярная модель металла в магнитном поле [19]. В этой модели, как известно, электроны не имеют собственных волновых функций; следует рассматривать волновые функции всего кристалла в целом. Закон дисперсии квази-частиц в этой модели определяется снова уравнением (3).

д) Слабо взаимодействующие электроны [21]. Если вычесть из энергии кулоновского взаимодействия электронов энергию их взаимодействия с электронным зарядом, распределенным со средней плотностью в кристалле, то можно построить такой оператор взаимодействия, который в

определенных условиях допустимо рассматривать как возмущение. Критерием малости последнего служит неравенство

$$\frac{m^* e^2}{\pi^2 \hbar^2}\left(\frac{\pi}{3n}\right)^{1/3} \ll 1, \tag{4}$$

где n — концентрация электронов, m^* — эффективная масса. Применение теории возмущения позволяет найти закон дисперсии квази-частиц в отсутствие магнитного поля и в магнитном поле:

$$E_{nk_3} = \mu^* H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m^*} - \frac{4}{5}\sqrt{\left[\mu^* H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m^*}\right]\frac{m^* e^4}{2\pi^2\hbar^2}}. \tag{5}$$

c) Недавно удалось в квази-классическом приближении построить теорию, в которой закон дисперсии электрона в магнитном поле определяется из закона его дисперсии в отсутствие магнитного поля, причем закон дисперсии в отсутствие магнитного поля может быть произволен [4, 20].

3. Осцилляции магнитной восприимчивости и теплоемкости в магнитном поле

Впервые осцилляции магнитной восприимчивости были исследованы в работах Л. Ландау [2] и А. Ахиезера [3], в основу которых был положен квадратичный закон дисперсии электронов. То же предположение было использовано в работе [5], формулы которой переходят в соответствующих предельных случаях в формулы работ [2] и [3]. В этой теории учитывается, кроме диамагнетизма, выражающегося формулой (1), также и спиновый парамагнетизм. Построенная теория качественно, а во многих вопросах и количественно соответствует опыту, если принять, что обнаруживаемый экспериментально эффект осцилляции магнитной восприимчивости обусловлен электронами с очень малыми эффективными массами и малой предельной энергией Ферми. Основными сравниваемыми с теорией величинами являются зависимость периода осцилляции от величины напряженности магнитного поля и от ее ориентации по отношению к кристаллографическим осям и зависимость амплитуды осцилляции от этих величин. Некоторые детали эксперимента, например зависимость амплитуды от напряженности магнитного поля в сильных магнитных полях, не могут, вероятно, быть объяснены на основании допущения о квадратичном законе дисперсии, а требуют более общих предположений [4]. Детальное сравнение теории с экспериментом может позволить, как это показано И. Лифшицем и А. Погореловым [20], воспроизвести поверхность Ферми для электронов и выяснить закон дисперсии вблизи этой поверхности.

«Тонкая структура» осцилляций, обнаруживаемая у многих металлов, особенно в сильных магнитных полях, как уже указывалось, может трактоваться как наличие нескольких электронных групп. Отделение тонкой структуры от основной частоты, если оно выполнимо, позволяет найти параметры, характеризующие такие группы.

Соответствие между теорией и экспериментом не является еще полным, что требует дальнейшего развития теории. Следует отметить также, что количественное сравнение теории с экспериментом, ввиду большой сложности теоретических и экспериментальных данных, весьма затруднительно.

Осцилляционные эффекты при повышении температуры исчезают постепенно. Б. Веркиным и И. Михайловым [22] показано (для цинка), что при изменении напряженности магнитного поля магнитная восприимчивость изменяется вплоть до комнатных температур. Теория изменения $\chi(H)$ в широкой области температур построена в работе [6] на основании допущения о квадратичном законе дисперсии. Сравнение теории с опытом показывает хорошее качественное согласие.

Теплоемкость электронного газа в магнитном поле при изменении последнего также осциллирует. Расчет этих осцилляций выполнен как на основании квадратичного закона дисперсии, так и в предположении о произвольном законе [4] (в рамках квази-классического приближения). Экспериментально этот эффект еще не был обнаружен. Измерения здесь весьма затруднительны, так как осциллирующая часть теплоемкости составляет лишь проценты от всей электронной теплоемкости.

4. Осцилляции сопротивления, поля Холла и термо-эдс

Сильное изменение сопротивления металлов в магнитном поле, как известно [7, 8, 18], может быть объяснено на основании так называемой двухзональной модели металла, в которой предполагается, что в кинетических эффектах принимают участие электроны двух перекрывающихся зон — слабо заполненной и почти заполненной. С другой стороны, в связи с тем, что осцилляции наблюдаются лишь в достаточно сильных магнитных полях, удовлетворяющих неравенству:

$$\omega\tau \gg 1, \tag{6}$$

где $\omega = \frac{eH}{mc}$, а τ — время свободного пробега, в основу расчета нельзя положить кинетическое уравнение, справедливое, строго говоря, лишь при выполнении неравенства, обратного (6). В работе [9] кинетические эффекты в магнитном поле рассчитывались на основании двухзональной модели металла, в предположении, что выполняется неравенство (6). Получены явные выражения для сопротивления, поля Холла и термо-эдс в магнитном поле. Все эти величины в сильных полях оказываются осциллирующими. Сопротивление выражается формулой:

$$\rho_H = \frac{C H^2 (f_1 + f_2)}{ec^2 H^2 (N_1 - N_2)^2 + eC^2 (f_1 + f_2)^2}, \tag{7}$$

где

$$f_1 = \frac{8}{3} E_0^2 m_1^4 \left[1 + a\mu_1 H - \frac{5\pi^2 \sqrt{2}}{\sqrt{\mu_1 H E_0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 kT}{\mu_1 H}\right) \cos\left(\frac{2\pi E_0}{\mu_1 H} - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots \right], \tag{8}$$

а f_2 — выражение, получающееся из (8) заменой m_1 на m_2 и E_0 на $A - E_0$ (E_0 — предельная энергия Ферми, A — перекрытие зон), N_1 и N_2 — концентрации электронов в верхней зоне и свободных мест (дырок) в перекрывающейся с ней нижней, C и a — константы.

Как видно из (7), осцилляции сопротивления накладываются на его рост в магнитном поле.

Осцилляции поля Холла подобны осцилляциям сопротивления, но отличаются от них по фазе на π, что экспериментально подтверждается опытами Боровика [14]. Осцилляции термо-эдс, уже после направления в печать работы [9], были экспериментально обнаружены авторами работы [15].

Таким образом все указанные в этом разделе осцилляционные эффекты экспериментально уже обнаружены. Однако следует отметить, что если осцилляции магнитной восприимчивости исследованы уже очень подробно, то экспериментальное изучение осцилляций других физических величин только начато, а сравнение теории с экспериментом фактически не производилось. Вместе с тем такое изучение необходимо для детального исследования энергетического спектра электронов в кристалле.

Цитированная литература

1. Ландау Л. Д., ZS. f. Phys., **64**, 629 (1930).
2. Ландау Л. Д., Добавление к статье Shoenberg D., Proc. Roy. Soc., **A170**, 341 (1939).
3. Ахиезер А. И., ДАН СССР, **23**, 872 (1939).

4. Лифшиц И. М., Косевич А. М., ДАН СССР, **96**, 963 (1954).
5. Зильберман Г. Е., ЖЭТФ, **21**, 1209 (1951).
6. Зильберман Г. Е., ЖЭТФ, **25**, 713 (1953).
7. Блохинцев Д. И. и Нордгейм Л., ZS. f. Phys., **84**, 168 (1933).
8. Давыдов Б. И., Померанчук И. Я., ЖЭТФ, **9**, 1295 (1939).
9. Зильберман Г. Е., ЖЭТФ (в печати).
10. De Haas W. I., van Alfvèn P. M., Leid. Comm., No. 212a (1930), No. 220 d (1932).
11. Веркин Б. И., Лазарев Б. Г., Руденко Н. С., ЖЭТФ, **20**, 93, 995 (1950); **25**, 471 (1953); ДАН СССР, **69**, 773 (1949); **73**, 59 (1950); **81**, 529 (1951); в Сборнике «Памяти С. И. Вавилова», стр. 344.— Изд. АН СССР, М.—Л., 1952.
12. Schubnikow L. W., De Haas W I., Leid. Comm., No. 207a, d, No. 210a (1930).
13. Лазарев Б. Г., Нахимович Н. М., Парфенова Е. А., ЖЭТФ, **9**, 1169 (1939).
14. Боровик Е. С., Диссертация, ХГУ, 1954.
15. Steel M. C., Babiskin I., Phys. Rev., **94**, 1394 (1954).
16. Зильберман Г. Е., ЖЭТФ, **23**, 49 (1952).
17. Peirls R., ZS. f. Phys. L., **80**, 763 (1933).
18. Kohler M., Ann. d. Phys., **6**, 18 (1949).
19. Зильберман Г. Е., ЖЭТФ, **25**, 313 (1953).
20. Лифшиц И. М., Погорелов А. В., ДАН СССР, **96**, 1143 (1954).
21. Зильберман Г. Е., ЖЭТФ, **25**, 549 (1954).
22. Веркин Б. И. и Михайлов И. Ф., ЖЭТФ, **24**, 342 (1953).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

Б. И. ВЕРКИН и И. М. ДМИТРЕНКО

АНИЗОТРОПИЯ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛОВ ЦИНКА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1. Введение

До 1930 г. на основании опытных данных и в соответствии с существовавшей теорией металлического состояния было принято считать, что магнитная восприимчивость диамагнитных и большинства парамагнитных металлов не зависит от напряженности магнитного поля в широкой области температур.

В 1930 г. в Лейденской лаборатории было обнаружено, что при низких температурах ($T \leqslant 20{,}4°$ K) электрическое сопротивление весьма чистых монокристаллов висмута сложным ступенчатым образом изменяется с изменением внешнего магнитного поля [1], а магнитная восприимчивость этих кристаллов зависит от напряженности внешнего поля сложным периодическим образом [2].

Количественная теория явления сложной «периодической» зависимости магнитной восприимчивости от напряженности внешнего поля при низких температурах (так называемого явления де-Хааза — ван-Альфена) была впервые дана Л. Ландау [3], исходя из модели свободных электронов, т. е. для случая почти не взаимодействующего электронного газа с квадратичным законом дисперсии. Взаимодействие электронов и периодическое поле решетки учитывалось только через самосогласованное поле путем введения эффективных масс. Позднее было дано обобщение этой теории с учетом спинового парамагнетизма [4] и были получены основные уравнения теории в форме, преобразованной к анизотропному случаю [5] и удобной для сравнения ее с опытными данными. В результате этого сравнения можно получить значения параметров теории: трех главных значений тензора эффективных масс, предельной энергии Ферми E_0 и числа электронов на атом металла n, участвующих в эффекте. Сравнение опытных данных, полученных при исследовании явления де-Хааза — ван-Альфена у висмута (металла с аномально малым числом электронов проводимости), с теорией [6] показало, что при значениях параметров, удовлетворительно согласующихся с результатами других физических исследований (например, исследования гальваномагнитных свойств висмута [7, 8]), теория передает основные количественные закономерности эффекта периодической зависимости магнитной восприимчивости от поля при низких температурах.

В результате ряда экспериментальных работ, выполненных за последние 8 лет, выяснилось, что, кроме висмута, еще у 14 металлов, а именно — у монокристаллов цинка [9], олова, кадмия, бериллия, индия, магния, сурьмы, ртути [10], галлия, таллия, алюминия, свинца, графита [11,12] и мышьяка [13] разность главных удельных восприимчивостей сложным периодическим образом зависит от напряженности внешнего магнитного поля при низких температурах. Место, занимаемое этими металлами в периодической системе элементов Менделеева, ясно из рассмотрения рис. 1. Таким образом, было выяснено, что рассматриваемый эффект представляет собой весьма общее свойство непереходных металлов 2-, 3-, 4- и 5-й групп

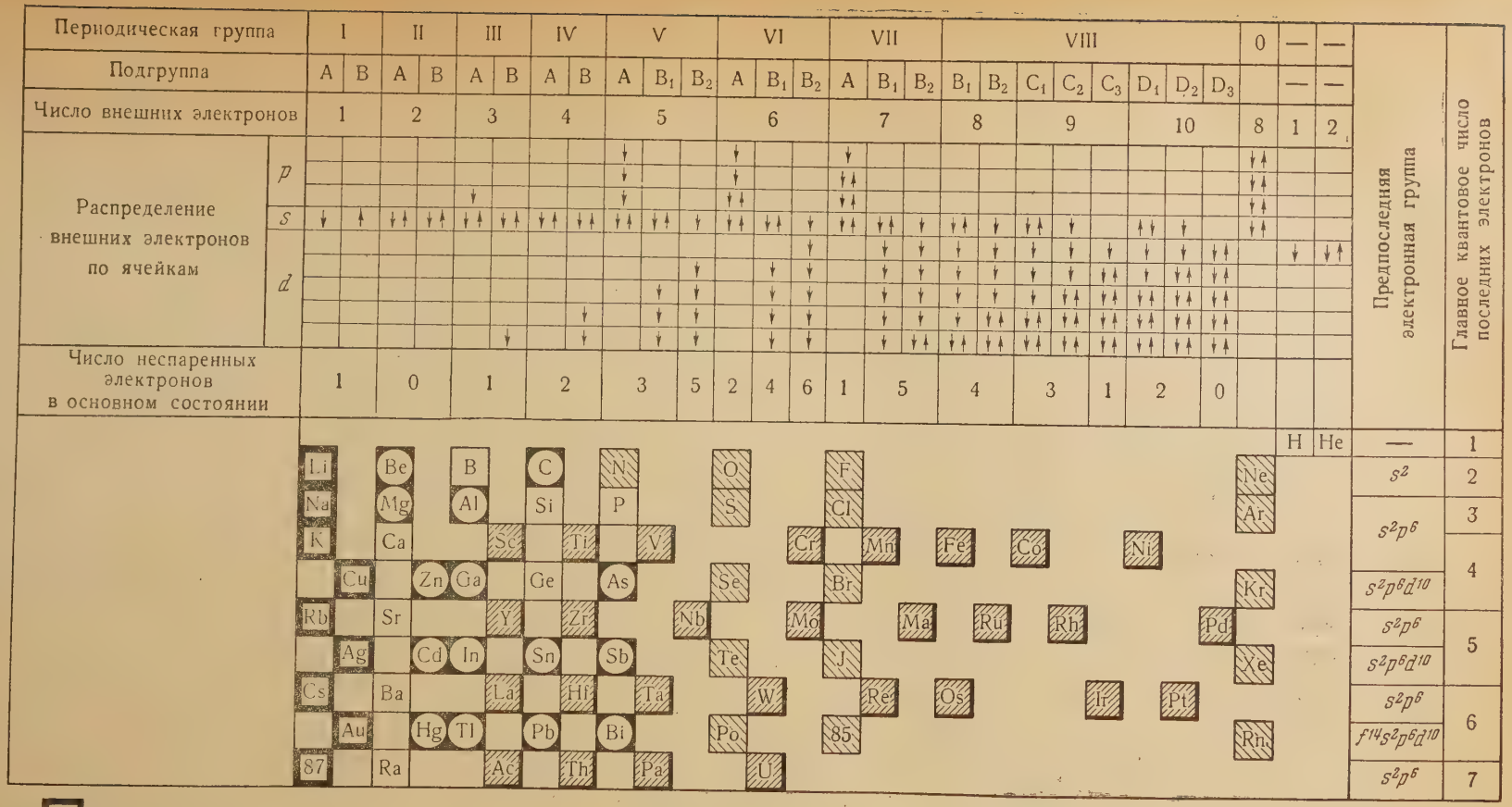


Рис. 1. Положение металлов, обнаруживающих «периодическую» зависимость магнитной восприимчивости от напряженности внешнего поля, в периодической системе элементов (развернутая схема)

периодической системы. Это свойство, являющееся следствием диамагнетизма электронов в металле, проявляется при низких температурах и, вероятно, зависит от индивидуальных особенностей электронной структуры каждого данного металла. Весьма важно, что у всех без исключения одновалентных металлов первой группы, исследованных до весьма низких температур ($T < 1°$ K) и больших полей ($H \leqslant 9 \cdot 10^4$ Oe), не обнаруживается при этом сложной «периодической» зависимости восприимчивости от магнитного поля. Сопоставление различных физических свойств металлов, обнаруживающих явление де-Хааза — ван-Альфена, показывает, что рассматриваемое явление наблюдается у диамагнетиков (Zn, Bi, Be и т. д.) и у парамагнетиков (Sn, Mg), у сверхпроводников (Sn, In, Zn и т. д.) и у несверхпроводников (Sb, As, графит и т. д.), у металлов с неограниченным ростом электросопротивления в поле (Bi, Sn, Zn и т. д.) и у металлов, для которых наблюдается эффект насыщения увеличения сопротивления в поле (In). Весьма важным для понимания роли взаимодействия электронов с решеткой является тот факт, что у металлов, кристаллизующихся в одинаковых решетках (Zn, Cd), эффект де-Хааза — ван-Альфена проявляется при температурах, тем более низких, чем ниже дебаевская характеристическая температура металла [10].

Многочисленные попытки сравнения опытных данных, относящихся к ряду перечисленных выше металлов, с теорией явления, основанной на модели свободных электронов [5, 11], неизменно приводят к малым величинам эффективных масс, предельных энергий и чисел электронов, участвующих в эффекте. Число электронов на атом металла, участвующих в эффекте, на 5—6 порядков меньше того числа их, которое обусловливает величину электронной теплоемкости металла, а также величины основных характеристик гальваномагнитных явлений. Другая возникшая трудность заключается в том, что если подобрать параметры двумя независимыми способами, сравнивая теорию с двумя различными по характеру экспериментами, например исследующими зависимость магнитной восприимчивости от величины поля и от его направления, то получаются разные результаты.

Дальнейшие экспериментальные исследования анизотропных кристаллов Be, Zn [14] привели к обнаружению «тонкой» и «сверхтонкой» структур явления сложной «периодической» зависимости их восприимчивости от поля (экспериментальная кривая $\Delta\chi(1/H)$ представляет собой результат суперпозиции нескольких кривых вида: $A_k(T, \theta) H^{-3/2} e^{-B_k(T,\theta)\cdot 1/H} \sin\left[\omega_k(\theta)\frac{1}{H} - \delta_k\right]$ с некратными и резко различными значениями ω_k*). Это обстоятельство, вместе с результатом сравнения теории с опытными данными для кривых с наименьшим ω_k, свидетельствующим о малости числа электронов, обусловливающих появление этой кривой, сделало реальным высказывавшееся раньше предположение о существовании в металле нескольких групп электронов, последовательно, по мере увеличения поля, обусловливающих развитие явления «периодической» зависимости восприимчивости от поля при низких температурах. Следует заметить, что известная ранее сложная структура кривых $\Delta\chi(1/H)$ у Al и Pb [11, 12], а также у Mg [14] может быть, в рамках упоминаемой теории, без специального исследования сильно анизотропных кристаллов, объяснена сложностью структуры энергетической поверхности одной группы электронов.

Теоретические исследования явления де-Хааза — ван-Альфена получили дальнейшее развитие в работах И. Лифшица, А. Косевича и А. Погорелова, связавших вопрос о сложной периодической зависимости восприимчивости металлов от поля с проблемой энергетического спектра электронов в металле — одной из центральных проблем современной

* Здесь, как и в дальнейшем, θ — угол между вектором поля **H** и главной осью кристалла **Z**.

теории металлов. Исходя из того, что при низких температурах взаимодействующие друг с другом и с решеткой электроны в металле в термодинамическом отношении можно рассматривать как идеальный ферми-газ заряженных квази-частиц с некоторым неизвестным законом дисперсии, Лифшиц и Косевич получили выражение для уровней энергии такой частицы в магнитном поле и вычислили магнитный момент газа этих квази-частиц [15]. В результате такого рассмотрения теоретически указан путь выяснения основных особенностей энергетического спектра квази-частиц (формы граничной поверхности Ферми и скоростей электронов у этой поверхности) на основе экспериментальных исследований угловой зависимости периода и амплитуды осцилляций магнитной восприимчивости от направления вектора магнитного поля по отношению к осям кристалла [16].

Существующих экспериментальных данных недостаточно для решения вопроса о возможности воспроизведения формы поверхности Ферми, и потому мы поставили целью данной работы возможно более детальное изучение угловой зависимости периодов и амплитуд осцилляций восприимчивости от направления поля, сравнение экспериментальных данных с известным характером угловой зависимости в теории, основанной на модели свободных электронов, а также выяснение возможностей использования этих данных для воспроизведения поверхности Ферми.

2. Условия эксперимента

В работе нами были исследованы магнитные свойства монокристаллов цинка в интервале полей $1500 \div 20\,000$ Oe при $T \leqslant 4{,}2°$ K.

Метод исследования, как и в предыдущих наших работах, состоял в измерении вращающего момента, действующего на кристалл, подвешенный в однородном магнитном поле на тонкой упругой нити гальванометра. В зависимости от величины вращающего момента его значение можно было определить либо по углу закручивания, либо по величине падения напряжения V_N на известном сопротивлении R_N после компенсации отклонения системы пропусканием тока через гальванометр [17]. Соответственно этим двум возможностям разность восприимчивостей вычислялась по формулам:

$$\Delta\chi = \frac{2K}{m \sin 2\theta} \cdot \frac{\Delta\alpha}{H^2}, \qquad (1)$$

где K — упругая постоянная нити, $\Delta\alpha$ — угол поворота подвесной системы, обусловленный действием на кристалл с массой m поля H, составляющего с главной осью угол θ, или

$$\Delta\chi = \frac{2K}{mGR_N \sin 2\theta} \cdot \frac{V_N}{H^2}, \qquad (2)$$

где G — динамическая постоянная гальванометра.

Монокристаллы цинка сферической формы выращивались методом Обреимова — Шубникова из металла фирмы Хильгер (для спектроскопии). Качество исследованных монокристаллов контролировалось методами рентгеноструктурного анализа. Определение ориентации монокристаллов и крепление их к оси подвеса осуществлялось на несколько переделанном для этой цели двукружном гониометре Чапского (см. [18]). Соответствующим образом травленый кристалл укреплялся в кристаллодержателе так, чтобы отражающая грань (сигнал), перпендикулярная к главной оси, была также перпендикулярна к оси винта, поднимающего или опускающего столик. После тщательной центрировки кристалла (обеспечивающей полную неподвижность сигнала при вращении столика), измерения углов между нормалями к отражающим плоскостям, параллельным вертикальному лимбу, и установки одной из бинарных осей кристалла вдоль оси вертикального лимба, по оси лимба ориентируется тонкая кварцевая палоч-

ка и приклеивается капелькой цапон-лака к кристаллу в месте выхода бинарной оси. Ошибка в ориентации осей кристалла относительно оси подвеса при работе указанным методом не превышала ±30′.

Относительно оси подвеса мы ориентировали кристалл двумя способами:

1) параллельно оси подвеса устанавливалась бинарная ось Y кристалла, проходящая через центры боковых граней кристалла,— первая ориентировка (рис. 2, *а*); при этом вектор поля, главная ось Z и ось X располагались в горизонтальной плоскости и измерялась величина $\Delta\chi = \chi_3 - \chi_1$;

2) параллельно оси подвеса устанавливалась бинарная ось X кристалла, проходящая через середины боковых ребер шестигранной призмы (кристалла),— вторая ориентировка (рис. 2, *б*); при этом вектор поля, главная ось Z и ось Y располагались в горизонтальной плоскости и измерялась величина $\Delta\chi = \chi_3 - \chi_2$.

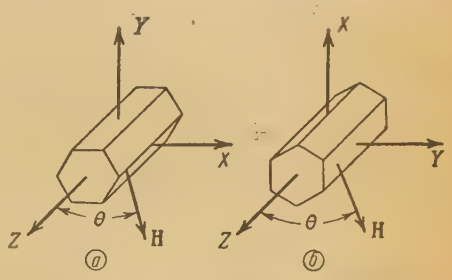


Рис. 2. Схема установки кристалла: Z — ось 6-го порядка, X и Y — бинарные оси; *а* — первая ориентировка кристалла, *б* — вторая ориентировка кристалла

Следует упомянуть, что мы исследовали и третью ориентировку кристалла, когда параллельно оси подвеса устанавливалась главная ось Z, а вектор поля располагался в базисной плоскости. Однако ввиду больших трудностей обработки и тем более интерпретации результатов этой части измерений мы не будем их рассматривать.

Магнитное поле создавалось большим электромагнитом типа Вейсса, который при помощи электромотора можно было поворачивать вокруг прибора, смонтированного на неподвижной подставке независимо от магнита. Точная ориентировка главной оси кристалла Z относительно делений лимба магнита определялась при комнатной температуре из вида угловой зависимости вращающей кристалл пары сил C. Ошибка в величине угла между вектором поля и главной осью кристалла не превышала ±30′.

3. Угловая зависимость механического момента, действующего на кристалл при постоянной напряженности магнитного поля

Подавляющее большинство исследователей сложной «периодической» зависимости восприимчивости от поля ограничиваются изучением нескольких кривых $\Delta\chi(1/H)$, соответствующих нескольким разным значениям θ, не придавая значения вопросу об угловой зависимости механического момента, действующего на кристалл при $H = \text{const}$.

На основании достоверных экспериментальных данных [6] известно, что ошибка в ориентировке кристалла приводит к искажению кривых $\Delta\chi(1/H)$, по-разному сказывающемуся для разных значений угла θ. В этом случае исследователь вынужден не обращать внимания на такие «искаженные» кривые, а это значит, что значительная часть его труда становится менее ценной. Кроме того, постоянно нужно учитывать и тот факт, что слабая мозаичность кристалла может привести к «искажению» — размытию или полному сглаживанию — осцилляций с малым периодом и амплитудой [15].

Все эти «искажения» обязаны проявиться на кривой угловой зависимости механического момента относительно оси подвеса, действующего на кристалл в постоянном по величине поле. Более того, рассмотрение этой кривой позволяет фиксировать наличие ферромагнитных или сильно парамагнитных примесей, часто анизотропно распределяющихся в кристалле. Все сказанное говорит в пользу необходимости в первую очередь проведения исследований кривой $C(\theta)$ или $\Delta\chi(\theta)$ при $H = \text{const}$ с использованием ее в качестве основания для выбора лучших образцов для даль-

нейших исследований и, конечно, с учитываемой в ряде случаев возможностью [5, 19] ее теоретической интерпретации.

На рис. 3, *а* представлена кривая $C_y(\theta)$ для одного из исследованных в работе кристаллов Zn в поле $H = 5600$ Ое; на рис. 3, *б* представлена кривая $C_x(\theta)$ для того же кристалла в том же поле.

Наличие плавной средней линии и огибающих, а также отсутствие каких-либо «искажений», даже при наименьших значениях периодов, свидетельствуют в пользу ничтожной мозаичности кристалла, в пользу малости ошибки в его ориентировке, а также в пользу отсутствия в нем анизотропно распределенных примесей. Все экспериментальные данные, рассматриваемые в дальнейшем, получены в результате исследований этого монокристалла цинка.

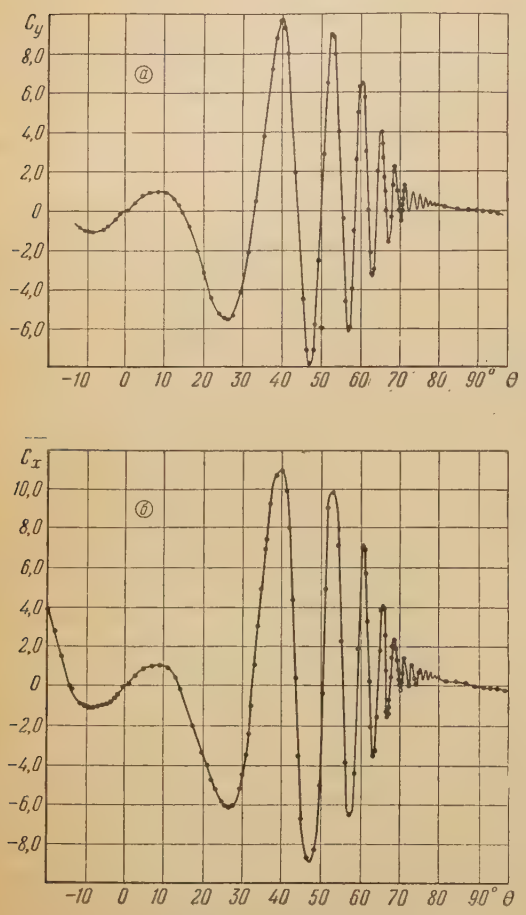


Рис. 3. Зависимость пары сил, действующей на кристалл цинка, от угла θ между вектором поля и главной осью кристалла; *а* — при первой ориентировке кристалла, *б* — при второй ориентировке кристалла

Обе кривые по характеру сильно напоминают друг друга: при малых углах период и амплитуда угловых осцилляций велики, и они резко уменьшаются при увеличении угла к $\theta = \pi/2$. Различие кривых можно отметить лишь по небольшой разнице в величинах периодов и амплитуд в соответствующих интервалах углов.

Кратко описанный характер кривых $C(\theta)$ однозначно свидетельствует в пользу того, что поверхность Ферми в данном случае сильно вытянута вдоль главной оси Z кристалла, в то время как в направлениях осей X и Y ее размеры много меньше и только несколько различаются. В рамках теории, основанной на модели свободного электронного газа в металле, это означает [5], что $m_3 \gg m_1$, $m_3 \gg m_2$ и $m_1 \neq m_2$ (m_1, m_2 и m_3 — главные значения тензора «эффективной» массы). Тот факт, что $m_1 \neq m_2$, еще более убедительно подтверждается наличием при гелиевой температуре заметной магнитной анизотропии в базисной плоскости кристалла. Исследованная для этого случая кривая $C_z(\varphi)$ имеет точно такой же характер, как и соответствующая кривая для Zn, приведенная в нашей прежней работе [20] (φ — угол между вектором поля **H**, расположенным в базисной плоскости, и одной из бинарных осей кристалла).

4. Зависимость разности главных удельных восприимчивостей от напряженности внешнего поля

Первая ориентировка кристалла (рис. 2, *а*). Для первой ориентировки кристалла при $T = 4{,}2°\ K$ и девятнадцати значениях угла θ были проведены измерения зависимости $\Delta\chi$ от $1/H$. Полу-

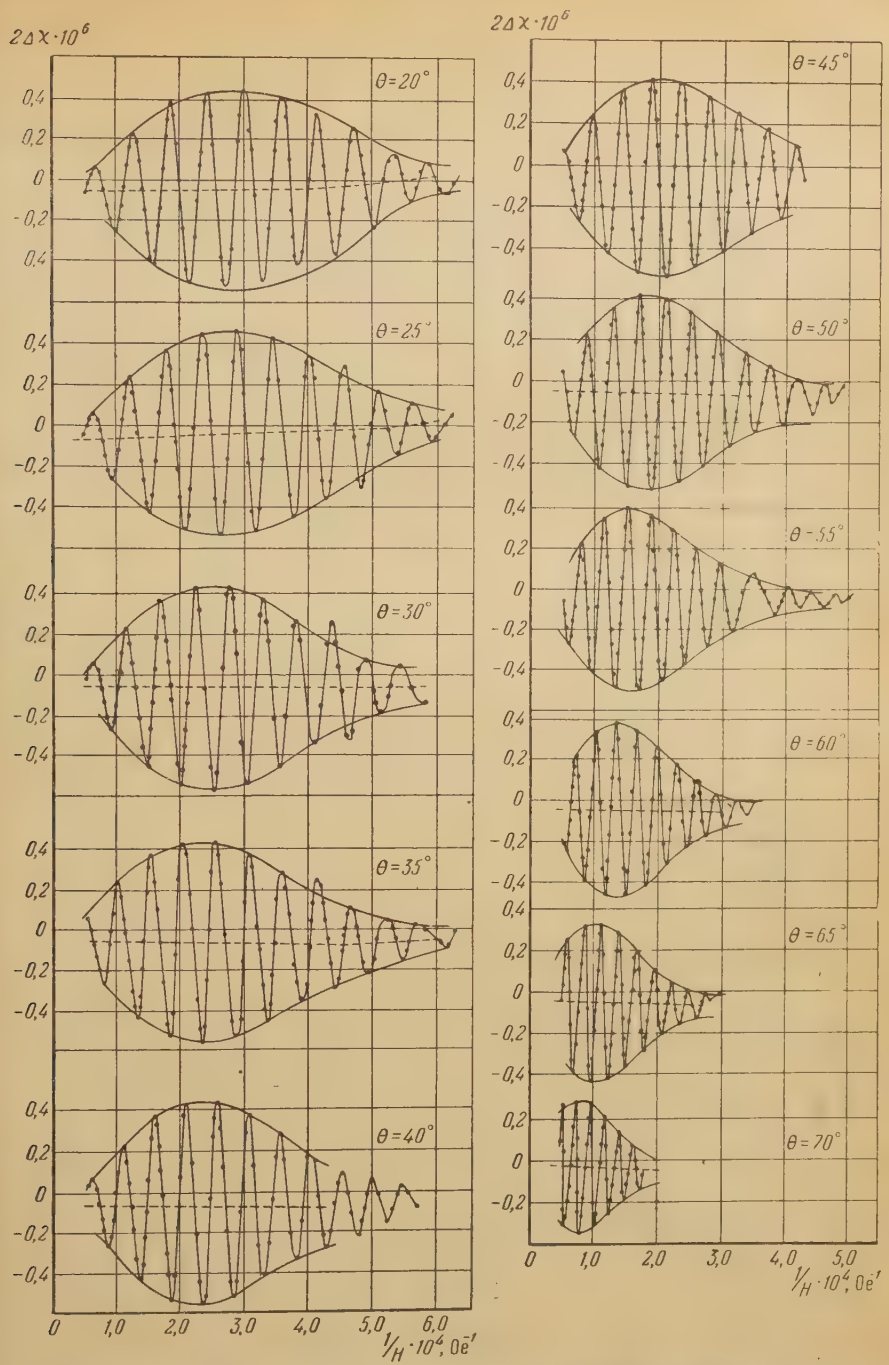


Рис. 4. Зависимость разности магнитных восприимчивостей (χ_3—χ_1) кристалла цинка при первой ориентировке кристалла и $T = 4{,}2°$ K от внешнего магнитного поля при углах $\theta = 20 \div 70°$

ченные при этом экспериментальные данные представлены графически на рис. 4 и 5*.

Как будет показано ниже, по ряду причин полного сравнения экспериментальных данных с теорией провести не удается, и потому в работе

* Кроме приведенных на рис. 4 и 5 углов θ, измерения были проведены еще при $\theta = 5$, 10 и 15°.

приводятся все надежные экспериментальные данные для того, чтобы после преодоления ряда трудностей, которые также будут указаны ниже, ими можно было воспользоваться для сравнения с теоретическими формулами.

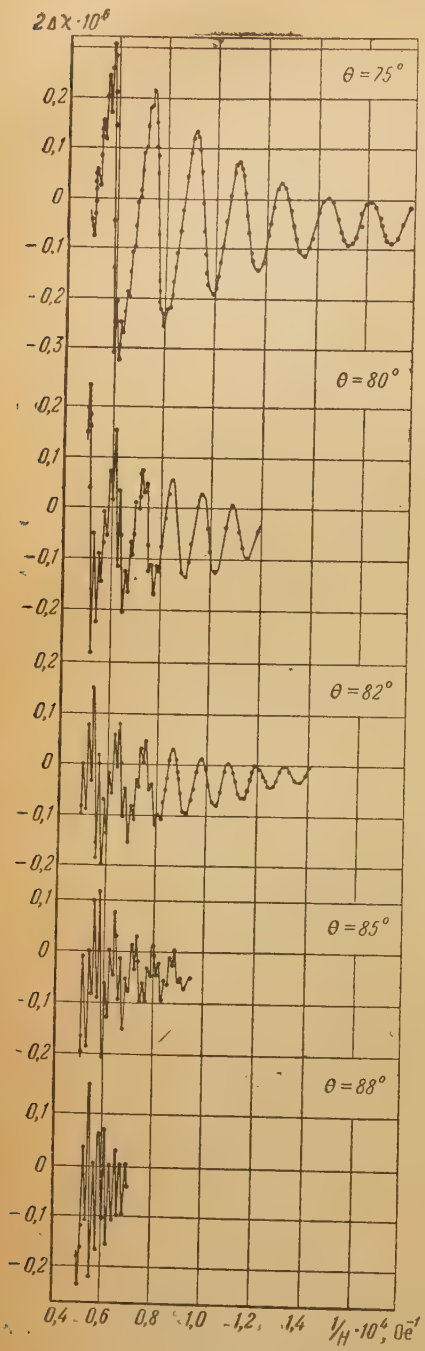


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но для углов $\theta = 75 \div 88°$

Все кривые $\Delta\chi\ (1/H)$ являются кривыми, периодически меняющимися около некоторого постоянного значения $\Delta\chi$, представляющего собой разность восприимчивостей $\chi_3 - \chi_1$, при малых значениях поля. Некоторое непостоянство средней линии в малых полях объясняется ошибками в определении поля и вращающего кристалл момента, которые в малых полях больше, чем в больших.

При малых углах θ ($\theta \leqslant 70°$) огибающие всех кривых $\Delta\chi(1/H)$ имеют максимум, причем поле H_{max}, соответствующее максимуму огибающей, зависит от угла: при увеличении угла максимум огибающей смещается в область бо́льших значений поля. Наличие максимума у огибающей, вполне удовлетворительное постоянство периода осцилляций, плавность максимумов и минимумов кривой, а также равенство интервалов поля, соответствующих ширинам максимумов и минимумов кривой $\Delta\chi\ (1/H)$, свидетельствуют в пользу того, что при $\theta \leqslant 70°$ каждая кривая может быть в весьма широком интервале полей представлена в виде функции вида:

$$\Delta\chi = -A + B_1^i(T,\ \theta)\, H^{-3/2} e^{-B_2^i(T,\theta)\frac{1}{H}} \times \times \sin\left[\omega^i(\theta)\,\frac{1}{H} - \delta^i\right]. \qquad (3)$$

При $\theta > 70°$ сначала в больших полях, а по мере дальнейшего увеличения θ в полях все меньшей величины проявляется так называемая «тонкая структура» явления: на фоне основной частоты осцилляций $\Delta\chi\ (1/H)$ появляется высокочастотная составляющая. Если «период» основной компоненты весьма заметным образом уменьшается по мере увеличения θ, то «период» высокочастотной компоненты, наоборот, растет с ростом θ и при $\theta = 88°$ (рис. 5) периоды и амплитуды обеих компонент становятся близкими.

Более детальное исследование зависимости $\Delta\chi$ от $1/H$ при углах $\theta < 70°$ позволило обнаружить существование еще одной высокочастотной компоненты, период и амплитуда которой убывают с увеличением θ. Периоды двух высокочастотных компонент близки по своим значениям при малых углах θ (до $\theta \approx 30 \div 35°$) и очень сильно различаются при $\theta \to \pi/2$.

Кривые рис. 6 иллюстрируют сложность «тонкой структуры» явления у кристаллов Zn. Небольшой участок кривой *A* (для $\theta = 25°$), отмеченный прямоугольником, изображен отдельно ниже; кривая *в* ($T = 4{,}2°$ K) позволяет убедиться в реальности существования высокочастотных компонент и при малых углах θ, притом двух компонент, поскольку довольно отчетливо видна картина биений. Понижение температуры опыта (кривые *б* и *а* рис. 6) приводит к появлению еще большего числа высокочастотных компонент, что очень усложняет анализ экспериментальных кривых.

Тонкая структура явления была детально исследована при всех указанных выше значениях угла θ и при $T = 4{,}2°$ K. Наличие только двух высокочастотных компонент, четкая картина биений при малых углах, малость амплитуд и периодов этих компонент дали возможность отфильтровать все три компоненты.

Следует заметить, что исследование других монокристаллов цинка, также не искаженных и столь же чистых, а также повторное исследование одного и того же кристалла, дважды укрепляемого к оси подвеса описанным выше способом, обеспечивает повторимость результатов.

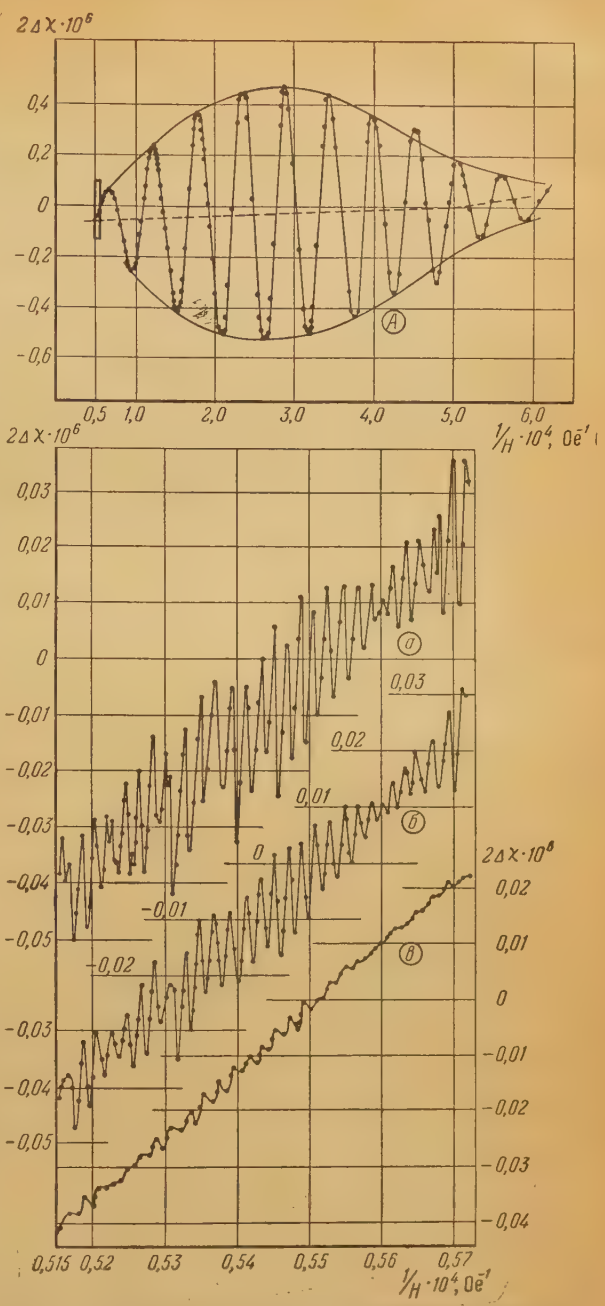


Рис. 6. Зависимость разности магнитных восприимчивостей ($\chi_3 - \chi_1$) кристалла цинка при первой ориентировке кристалла и $\theta = 25°$ от внешнего магнитного поля при разных температурах *T*: *A* — $T = 4{,}2°$ K; *а* — $T = 1{,}45°$ K; *б* — $T = 2{,}0°$ K; *в* — $T = 4{,}2°$ K. Кривая *в* представляет собой растянутый по обеим координатным осям участок кривой *A*, отмеченный на рисунке прямоугольником. Кривые *а* и *б* сняты для того же участка, что и кривая *в*, но при более низких температурах

Вторая ориентировка кристалла (рис. 2, *б*). Для второй ориентировки кристалла измерения зависимости $\Delta\chi = \chi_3 - \chi_2$ от $1/H$ были проведены при $T = 4{,}2°$ K и четырнадцати значениях угла θ. Полученные при этом экспериментальные данные представлены на рис. 7. При второй ориентировке кристалла особенно детально исследована область больших углов.

Основные особенности всех кривых зависимости $\Delta\chi$ $(1/H)$, полученных как при первой, так и при второй ориентировках кристалла, одни и те же.

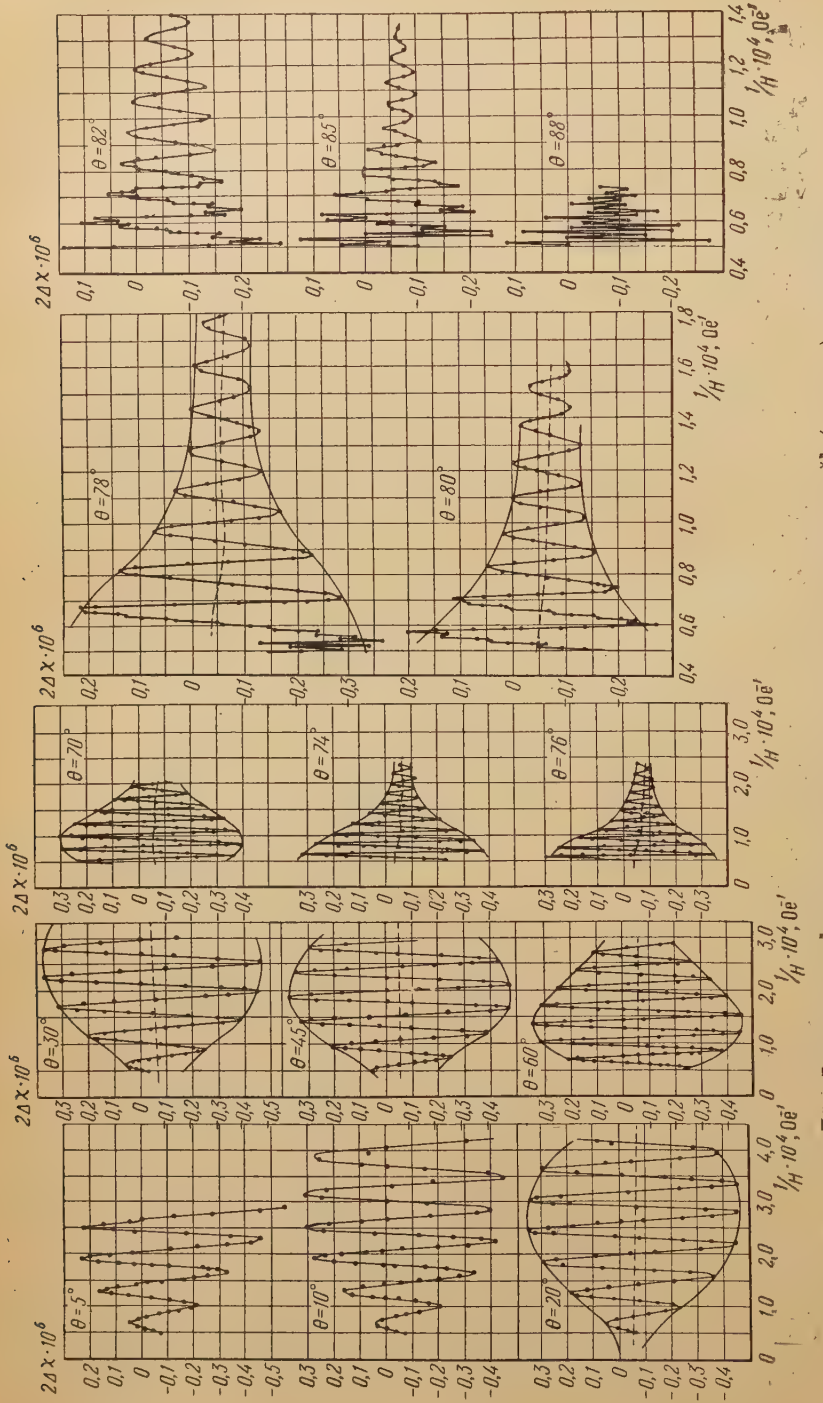


Рис. 7. Зависимость разности магнитных восприимчивостей $(\chi_3 - \chi_2)$ кристалла цинка при второй ориентировке кристалла и $T = 4{,}2°$ K от внешнего магнитного поля при углах $\theta = 5 \div 88°$

Более того, величины, характеризующие пару кривых, соответствующих двум разным ориентировкам кристалла, но одинаковым значениям угла θ, весьма близки.

5. Угловая зависимость «периода» осцилляций

Первая ориентировка кристалла. Выше было указано, что наличие при $T = 4{,}2°$ К только двух высокочастотных компонент и малость периодов и амплитуд этих компонент по сравнению с соответствующими характеристиками основной компоненты позволили отфильтровать все три компоненты и рассматривать экспериментальную кривую как сумму трех кривых:

$$\Delta\chi_{\text{эксп}} = \Delta\chi^0 + \Delta\chi^{\text{I}} + \Delta\chi^{\text{II}}, \quad (4)$$

из которых первая описывается формулой (3), а остальные две — только периодическим слагаемым формулы (3), с разными значениями, а возможно, и с разной угловой зависимостью величин B_1^0, B_1^{I}, B_1^{II}, B_2^0, B_2^{I}, B_2^{II} и ω^0, ω^{I}, ω^{II}.

Каждая компонента обращается в нуль при условии, что

$$\omega^i(\theta)\frac{1}{H} - \delta^i = n^i\pi, \quad (5)$$

где $n = 0, 1, 2\ldots$, $i = 0$, I, II.

Построив график $n = n(1/H)$ для $\theta = \text{const}$, мы должны получить прямую линию, угловой коэффициент которой равен $\frac{\omega^i(\theta)}{\pi} = \frac{2}{\Delta(1/H)}$ ($\Delta(1/H)$ — «период» осцилляций разности восприимчивости при выбранном значении угла θ), а свободный член равен δ^i/π. Заметим, что при построении графика $n = n(1/H)$ необходимо руководствоваться следующими положениями:

1) должна существовать область сверхсильных полей, в пределах которой $\Delta\chi$ уже не меняется периодически с полем [21]; $n = 0$ при $1/H > 0$;

2) при $\delta > \pi$ необходимо учесть изменение в формуле (3) знака $\sin\left[\omega^i(\theta)\frac{1}{H} - \delta^i\right]$.

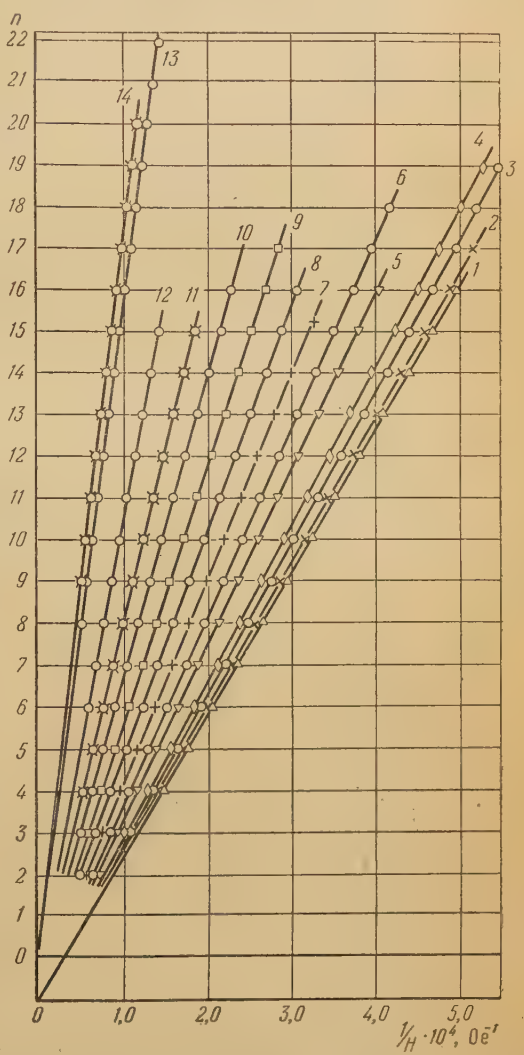


Рис. 8. Графики n $(1/H)$ для первой ориентировки кристалла и разных углов θ: *1* — 15°, *2* — 20°, *3* — 25°, *4* — 30°, *5* — 40°, *6* — 45°, *7* — 50°, *8* — 55°, *9*—60°, *10*—65°, *11* — 70°, *12* — 75°, *13* — 80°, *14* — 82°

На рис. 8 представлены графики $n = n(1/H)$ для основной компоненты $\Delta\chi_{\text{эксп}}(1/H)$ и разных значений угла θ при первой ориентировке кристалла. Как видно из рисунка, точки действительно ложатся на прямые. При малых углах θ (прямые *1—4*, рис. 8) в малых полях экспериментальные точки укладываются на прямую линию; в больших полях экспериментальные точки располагаются выше продолженной прямой, т. е. «период» увеличивается, в то время как при θ, близких к $\pi/2$ (прямые *13* и *14*, рис. 8), в больших полях экспериментальные точки располагаются ниже продолженной прямой линии, т. е. «период» осцил-

ляций умепьшается. Описанные отклонения зависимости $n(1/H)$ от линейности, связанные со слабой зависимостью ω от H в больших полях, отчетливее видны на рис. 9, на котором изображена часть графиков рис. 8 в несколько более крупном масштабе.

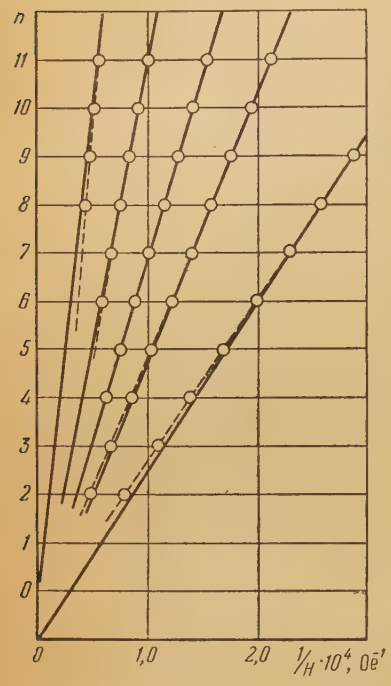


Рис. 9

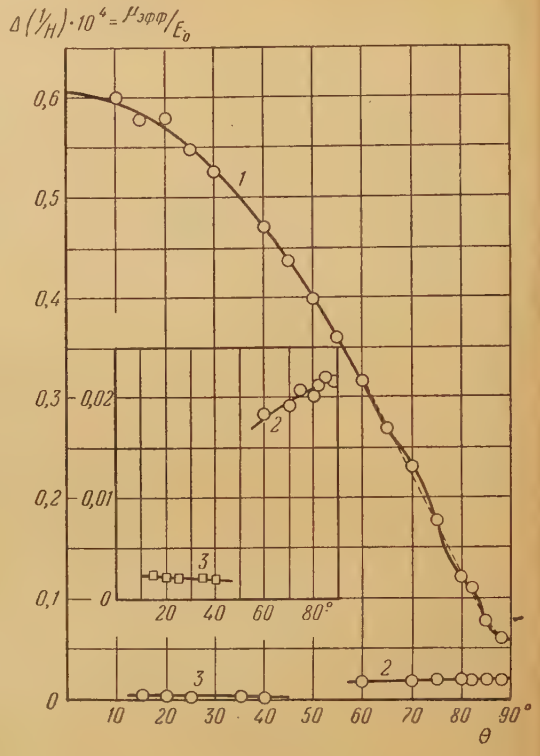


Рис. 10

Рис. 9. Схема отклонений графиков $n(1/H)$ от линейности в больших полях
Рис. 10. Зависимость периода осцилляций разности магнитных восприимчивостей $(\chi_3 - \chi_1)$ кристалла цинка при первой ориентировке кристалла и $T = 4{,}2°$ K от угла θ: *1* — основная (низкочастотная) компонента, *2* и *3* — высокочастотные компоненты

В первом приближении, отвлекаясь от этих отклонений, можно совершенно однозначно провести прямую линию через большое число экспериментальных точек, соответствующих не слишком большим полям или, иначе, не слишком малым n. Тогда угловой коэффициент каждой такой прямой определяет «период» осцилляций $\Delta\chi$ при заданном значении угла θ.

Следует заметить, что начальная фаза δ^i, определяемая экстраполяцией прямой линии к бесконечным полям $(1/H \to 0)$, зависит от θ и в интервале

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

изменяется в пределах:

$$0 \leqslant |\delta| \leqslant \pi.$$

Кривые рис. 10 представляют собой угловую зависимость «периодов» трех компонент $\Delta\chi_{\text{эксп}}(1/H)$ для первой ориентировки кристалла. Кривая *1* характеризует угловую зависимость «периода» основной компоненты; кривые *2* и *3* характеризуют угловую зависимость «периодов»

двух компонент тонкой структуры явления. Прежде всего обращает на себя внимание различный характер угловой зависимости «периодов» всех трех компонент, особенно основной компоненты и той из высокочастотных компонент, которая описывается кривой *2*. Кроме того, важным является наличие небольшой, но достаточно отчетливо выраженной периодичности изменения $\Delta(1/H)$ с углом в области углов, близких к $\pi/2$* (начиная с $\theta \approx 60°$).

Вторая ориентировка кристалла. Все кривые $\Delta\chi_{\text{эксп}}(1/H)$, построенные в результате исследования второй ориентировки кристалла в поле (рис. 2, *б*) при $T = 4{,}2°$ К, также можно рассматривать как сумму трех кривых в соответствии с формулой (4). Отфильтровав отдельные компоненты и для каждой из них построив графики $n^i = n^i(1/H)$ для $\theta = \text{const}$, мы также определяем периоды осцилляций $\Delta\chi^i$ при заданных значениях углов θ.

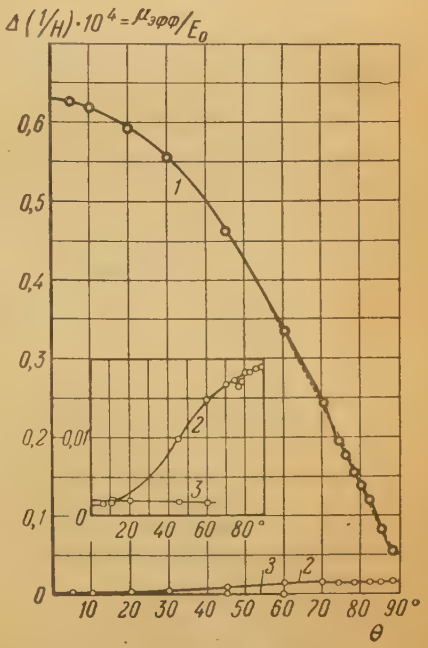


Рис. 11. То же, что на рис. 10, но при второй ориентировке кристалла

Кривые рис. 11 представляют собой угловую зависимость «периодов» трех компонент $\Delta\chi_{\text{эксп}}(1/H)$ для второй ориентировки кристалла. Кривая *1* характеризует угловую зависимость «периода» основной компоненты, кривые *2* и *3* характеризуют угловую зависимость «периодов» двух компонент тонкой структуры явления. Как и в случае первой ориентировки кристалла, характер угловой зависимости «периодов» трех компонент весьма различен, причем это различие особенно заметно при рассмотрении кривых *1* и *2*. В области углов, близких к $\pi/2$ (начиная с 60°), существует слабая периодичность угловой зависимости периода.

В целом характер соответствующих кривых рис. 10 и рис. 11 одинаков; существуют лишь некоторые количественные различия. Так, например, «период» основной компоненты при $\theta \to 0$ для второй ориентировки больше, чем для первой, в то время как при $\theta \to \pi/2$, напротив, для второй ориентировки он меньше, чем для первой, и т. п.

6. Угловая зависимость амплитуды кривой $\Delta\chi(1/H)$ в постоянном поле

Теория явления, основанная на модели свободных электронов, предсказывает вполне определенный характер угловой зависимости не только «периодов» осцилляций, но также и амплитуды кривой $\Delta\chi(1/H)$.

Первая ориентировка кристалла. Кривые рис. 12 представляют угловую зависимость амплитуды осцилляций основной компоненты при четырех постоянных во всем интервале углов значениях напряженности магнитного поля. В малом поле (кривая *1*) угловая зависимость монотонна; мало изменяясь с углом при $0 < \theta < 30°$, амплитуда резко убывает при $\theta \to \pi/2$. В бо́льших полях характер угловой зависимости усложняется, на кривых появляются минимумы и максимумы,

* При $\theta \to 0$ абсолютная ошибка в определении периода возрастает из-за малости пары сил, действующей на кристалл.

причем положение максимума различно в разных полях: с увеличением поля максимум, уменьшаясь по величине, смещается в область больших углов.

Вторая ориентировка кристалла. Кривые рис. 13 представляют угловую зависимость амплитуды осцилляций основной компоненты для второй ориентировки кристалла притех же четырех значениях поля. В этом случае даже в самом малом поле существует максимум на кривой, также смещающийся в область больших углов при увеличении фиксированного значения поля; минимумы на кривых отсутствуют.

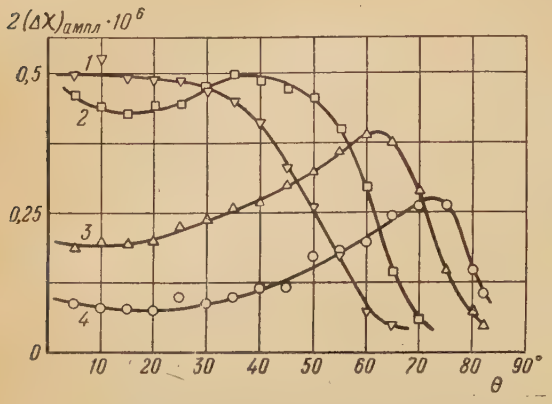


Рис. 12. Зависимость амплитуды осцилляций разности магнитных восприимчивостей ($\chi_3 - \chi_1$) кристалла цинка при первой ориентировке кристалла и T=4,2° К от угла θ: *1* — H=3 300 Oe, *2* — H = 5 000 Oe, *3* — H = 10 000 Oe, *4* — H = 20 000 Oe

Следует заметить, что аналогичные кривые для высокочастотных компонент не имеют экстремумов; так, для той из высокочастотных компонент, период которой изображается кривыми *2* на рис. 10 и 11, при H = const амплитуда плавно увеличивается с увеличением угла θ.

7. Обсуждение результатов

Исследование магнитных свойств монокристаллов Zn в базисной плоскости показывает, что пара $C_z(\varphi)$ имеет период по углу φ, равный π/3 [20]. Этот экспериментальный факт принято объяснять допущением, что поверхность постоянной энергии состоит не из одного, а из трех трехосных эллипсоидов, совмещающихся друг с другом при повороте на угол 2π/3 в базисной плоскости [5]. При таком допущении теория явления, основанная на модели свободных электронов и преобразованная к анизотропному случаю, правильно описывает симметрию C_z относительно бинарных осей и для детально рассмотренных в данной работе двух ориентировок кристалла приводит при

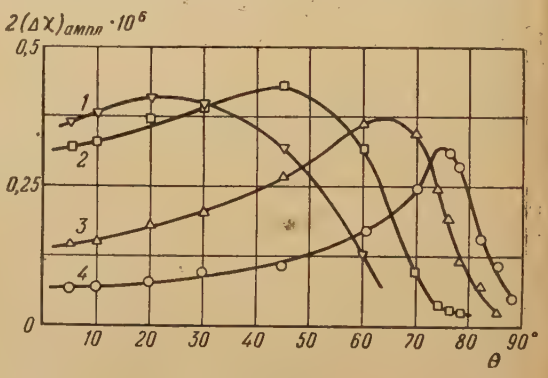


Рис. 13. То же, что на рис. 12, но для второй ориентировки кристалла

$$\frac{kT}{E_0} \ll 1, \quad \frac{\mu_{эфф} H}{E_0} \ll 1, \quad \frac{2\pi^2 kT}{\mu_{эфф} H} \gg 1 \qquad (6)$$

к следующим основным соотношениям:

при $\varphi = 0$ (первая ориентировка кристалла)

$$C_y = (\chi_3 - \chi_1) H^2 \sin\theta\cos\theta = \gamma H^2 \sin\theta\cos\theta \left\{(m_3 - m_1)\,\psi\,[\alpha H\,\beta(\theta, 0)] + \right.$$

$$\left. + \frac{4m_3 - m_1 - 3m_2}{2}\,\psi\left[\alpha H\,\beta\left(\theta, \frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}, \qquad (7)$$

при $\varphi = \pi/2$ (вторая ориентировка кристалла)

$$C_x = -(\chi_3 - \chi_2) H^2 \sin\theta\cos\theta = -\gamma H^2 \sin\theta\cos\theta \left\{(m_3 - m_2)\psi\left[\alpha H\beta\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{4m_3 - 3m_1 - m_2}{2}\psi\left[\alpha H\beta\left(\theta, \frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}. \qquad (8)$$

Здесь

$$\psi[\alpha, H, \beta] = \beta^{-3/2}\exp\left\{-\frac{2\pi^2 kT}{\mu H}\right\}\frac{4\pi kT}{E_0(\alpha H)^{3/2}}\sin\left(\frac{2\pi E_0}{\mu H} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi\sqrt{m_1 m_2 m_3}}{m_0\beta}\right), \qquad (9)$$

$$\alpha = \frac{e\hbar}{cE_0\sqrt{m_1 m_2 m_3}}, \quad \gamma = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar c^2}\sqrt{\frac{E_0}{m_1 m_2 m_3}}, \quad \mu = E_0\alpha\beta; \qquad (10)$$

$$\beta(\theta, \varphi) = \sqrt{m_1\sin^2\theta\cos^2\varphi + m_2\sin^2\theta\sin^2\varphi + m_3\cos^2\theta}. \qquad (11)$$

Прежде всего следует заметить, что всегда при сравнении экспериментальных данных с теорией [6, 11] в выражениях для C_x или C_y довольно произвольно оставляют только одно слагаемое, считая его функцией наибольших β. Это в общем случае неверно, так как для сильно анизотропных масс, когда $m_3 \gg m_1$, $m_3 \gg m_2$ и $m_2 \neq m_1$ (Zn),

$$\frac{\beta(\theta, 0)}{\beta\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{m_1\sin^2\theta + m_3\cos^2\theta}}{\sqrt{(1/4 m_1 + 3/4 m_2)\sin^2\theta + m_3\cos^2\theta}}$$

и

$$\frac{\beta\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right)}{\beta\left(\theta, \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{m_2\sin^2\theta + m_3\cos^2\theta}}{\sqrt{(1/4 m_2 + 3/4 m_1)\sin^2\theta + m_3\cos^2\theta}}$$

— порядка единицы, по крайней мере при малых углах θ; в той же области малых углов, когда периоды близки, амплитуды двух слагаемых в выражениях для C_x и C_y отличаются примерно вдвое. Положение существенно осложняется тем, что соотношения периодов и амплитуд двух слагаемых при $\theta \to \pi/2$ не известны, и это затрудняет сравнение экспериментальных данных с теорией.

Отношение периодов и амплитуд двух слагаемых в (7) и (8) при $\theta \to \pi/2$ определяется соотношением величин m_1 и m_2, а также тем, насколько значительно неравенство $\frac{2\pi^2 kT}{\mu_{эфф} H} > 1$. Если $\frac{2\pi^2 kT}{\mu_{эфф} H} \gg 1$, тогда характер угловой зависимости амплитуды каждого слагаемого определяется экспоненциальным множителем: величина амплитуды монотонно убывает с увеличением угла θ (если $m_3 \gg m_1$ и $m_3 \gg m_2$).

Если $m_2 \gg m_1$, тогда при всех значениях θ (вплоть до $\theta = \pi/2$) для первой ориентировки кристалла амплитуда второго слагаемого в выражении для C_y остается больше амплитуды первого слагаемого, причем последняя тем меньше, чем больше m_2 по сравнению с m_1, и при заданной величине m_2/m_1 тем меньше, чем больше $\frac{2\pi^2 kT}{\mu_{эфф} H}$ по сравнению с единицей. В то же время (т. е. при $m_2 \gg m_1$) при некотором θ для второй ориентировки кристалла амплитуды обоих слагаемых в выражении для C_x уравниваются, а при $\theta \to \pi/2$ амплитуда первого слагаемого становится больше амплитуды второго слагаемого, причем тем больше, чем больше m_2/m_1 и $\frac{2\pi^2 kT}{\mu_{эфф} H}$.

Если $m_2 \ll m_1$, тогда, наоборот, при всех значениях θ (вплоть до $\theta = \pi/2$) для второй ориентировки кристалла амплитуда второго слагаемого в выражении для C_x остается больше амплитуды первого слагае-

мого, в то время как при некотором θ для первой ориентировки кристалла амплитуды обоих слагаемых в выражении для C_y уравниваются, а при $\theta \to \pi/2$ амплитуда первого слагаемого становится больше амплитуды второго слагаемого.

Если же $m_2/m_1 \neq 1$, но мало отличается от единицы в ту или другую сторону, то для обеих ориентировок кристалла при всех значениях θ главными компонентами C_x и C_y являются вторые слагаемые. Область значений отношения $m_2/m_1 \neq 1$, удовлетворяющих этому условию, тем больше, чем меньше неравенство $\frac{2\pi^2 kT}{\mu H} > 1$.

Таким образом, зная, что каждая компонента (в том числе и основная) экспериментальной кривой $\Delta\chi(1/H)$ представляет собой результат сложения двух слагаемых типа (7) или (8) с близкими периодами и разными амплитудами, мы можем считать, что суммарная кривая имеет ту же самую видимую частоту, что и слагаемое, обладающее при заданном θ наибольшей амплитудой. Тогда, используя данные рис. 10 и рис. 11 при $\theta \to 0$ и $\theta \to \pi/2$ и полагая, что $\frac{2\pi^2 kT}{\mu H} > 1$ при всех θ, можно считать, что для основной компоненты $\Delta\chi(1/H)$ будут иметь место равенства:

$$\frac{\Delta(1/H)_{\theta\to 0}}{\Delta(1/H)_{\theta\to \pi/2}} = 9{,}8 = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{m_3}{m_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3\frac{m_2}{m_1}}}, & \text{если } m_2 \gg m_1 \\ \sqrt{\frac{m_3}{m_1}}, & \text{если } m_2 \ll m_1 \end{cases} \Bigg\} \text{первая ориентировка кристалла;}$$

$$\frac{\Delta(1/H)_{\theta\to 0}}{\Delta(1/H)_{\theta\to \pi/2}} = 11{,}8 = \begin{cases} \sqrt{\frac{m_3}{m_2}}, & \text{если } m_2 \gg m_1 \\ 2\sqrt{\frac{m_3}{m_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3\frac{m_1}{m_2}}}, & \text{если } m_2 \ll m_1 \end{cases} \Bigg\} \text{вторая ориентировка кристалла}$$

$$\frac{\Delta(1/H)^{\mathrm{I}}_{\theta\to \pi/2}}{\Delta(1/H)^{\mathrm{II}}_{\theta\to \pi/2}} = 1{,}1 = \frac{\sqrt{m_1+3m_2}}{\sqrt{m_2+3m_1}}, \quad \text{если } \frac{m_2}{m_1} \neq 1,$$

(неравенство слабое).

Исходя из какого-либо конкретного предположения о соотношении m_1 и m_2, можно, пользуясь верхними двумя равенствами, вычислить отношение масс. Однако вычисления приводят либо к результату, противоречащему первоначальному предположению о характере отношения m_2/m_1, либо к тому, что одно из отношений масс оказывается отрицательным. Последнее из трех равенств приводит к $m_2/m_1 \approx 1{,}4$.

Все сказанное свидетельствует в пользу того, что кривые *1* рис. 10 и рис. 11, хотя каждая из них порознь и может быть удовлетворительно описана функцией $\mu/E_0 = \frac{e\hbar\sqrt{M\sin^2\theta + m_3\cos^2\theta}}{c\sqrt{m_1 m_2 m_3 E_0}}$ (где M равно m_1 или $^1/_4 m_1 + {}^3/_4 m_2$ для первой ориентировки кристалла и m_2 или $^1/_4 m_2 + {}^3/_4 m_1$ для второй ориентировки), в широком интервале значений θ (до 45—50°) близкой к косинусоиде, в совокупности могут быть описаны формулами (7) и (8) лишь в области больших θ ($\theta \to \pi/2$).

Этот вывод еще более уверенно подтверждается характером угловой зависимости амплитуд осцилляций (рис. 12 и рис. 13). Функция $\psi[\alpha, H, \beta]$ зависит от θ, причем она достигает максимума при θ, удовлетворяющем условию:

$$\frac{2\pi^2 kT}{\mu H} = \frac{3}{2}.$$

Если $m_3 \gg m_1$ и $m_3 \gg m_2$ (а это и имеет место в случае монокри-

таллов Zn), то при $\frac{2\pi^2 kT}{\mu H} > 1$ производная кривой угловой зависимости амплитуды каждого слагаемого в C_x и C_y отрицательна. Максимумы на кривых рис. 12 и рис. 13 определяют границу применимости формул (7) и (8) для описания экспериментальных данных. Поскольку $m_2/m_1 \neq 1$, но мало отличается от единицы, естественно считать, что участки этих кривых при больших θ (т. е. правее максимумов, где производная отрицательна) также в какой-то мере описываются вторыми слагаемыми в выражениях для C_x и C_y.

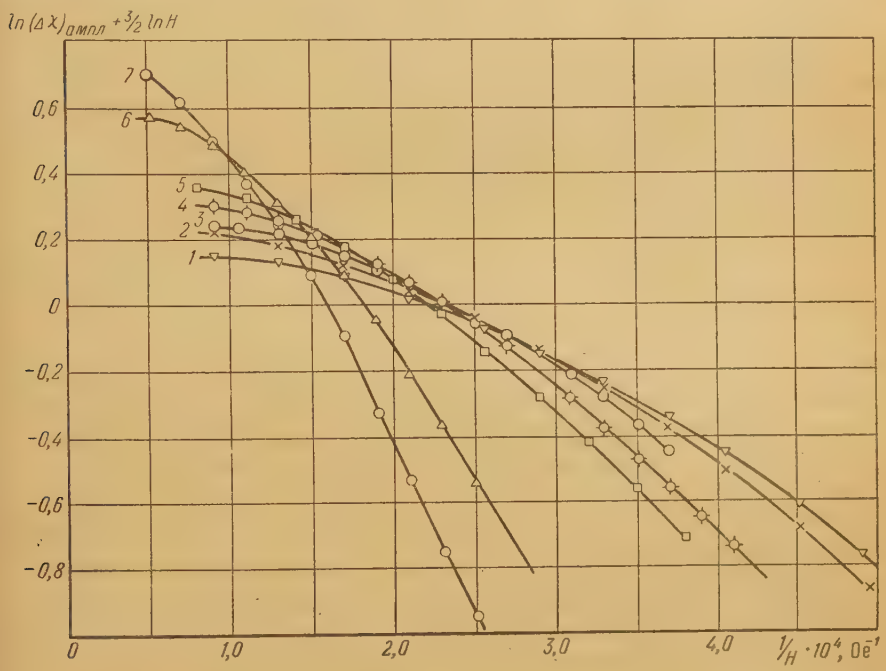


Рис. 14. Зависимость величины $\ln(\Delta\chi)_{\text{ампл}} + \frac{3}{2}\ln H$ от $1/H$ при первой ориентировке кристалла и $T = 4{,}2°$ K для разных углов θ: *1* — 15°, *2* — 25°, *3* — 30°, *4* — 40°, *5* — 45°, *6* — 60°, *7* — 65°

Обычным этапом сравнения экспериментальных кривых $\Delta\chi(1/H)$ при $\theta = \text{const}$ с теорией является сравнение форм их огибающих с теоретически предсказанной формой. Согласно теории, если $\Delta\chi(1/H)$ описывается одним слагаемым формулы (7) или (8), то

$$\ln(\Delta\chi)_{\text{ампл}} + \frac{3}{2}\ln H = \text{const} - \frac{2\pi^2 kT}{\mu}\cdot\frac{1}{H}. \qquad (12)$$

Кривые рис. 14 иллюстрируют зависимость экспериментальных значений $\ln(\Delta\chi)_{\text{ампл}} + \frac{3}{2}\ln H$ от $1/H$ для ряда значений θ при первой ориентировке кристалла. Кривые *1—3*, соответствующие малым углам, нигде не имеют линейных участков; при бóльших θ отклонение от линейности наступает в бóльших полях. Существенно, что указанное отклонение от линейности определяет наличие максимума и участков кривых угловой зависимости амплитуды с положительной производной, где $\frac{2\pi^2 kT}{\mu H} < 1$. Следует указать, что кривые рис. 14 вполне удовлетворительно могут быть описаны уравнением типа:

$$\ln(\Delta\chi)_{\text{ампл}} + \frac{3}{2}\ln H = \text{const} - a\frac{1}{H} - bH + cH^2. \qquad (13)$$

Итак, наличие максимумов на кривых угловой зависимости амплитуд, имеющих одинаковый характер как для первой, так и для второй ориентировок кристалла, нелинейность зависимости $\ln(\Delta\chi)_{\text{ампл}} + \frac{3}{2}\ln H$ от $1/H$ при малых углах θ и близость значений m_1 и m_2, прямо вытекающая из ряда экспериментальных данных и подтверждаемая анализом кривых угловой зависимости периода осцилляций основной компоненты магнитной восприимчивости $\Delta\chi(1/H)$, позволяют утверждать, что в области больших θ ($\theta \to \pi/2$) результаты опыта описываются формулами (7) и (8), в которых главным (с большей амплитудой) является второе слагаемое. В малых углах ($\theta \to 0$) неравенство $\frac{2\pi^2 kT}{\mu H} > 1$ не выполняется, и вместо (7) и (8) необходимо, повидимому, пользоваться общей формулой для магнитного момента единицы объема:

$$M = \frac{\mu}{2\pi^2}\left(\frac{\sqrt{mE_0}}{\hbar}\right)^3 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{6}\left[-1 + 3\left(\frac{m}{m_0}\right)^2\right]\frac{\mu H}{E_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\pi^2 kT}{\sqrt{\mu H E_0}} \sum_{p=}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin\left(\frac{2\pi^2 pE_0}{\mu H} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(p\pi\frac{m}{m_0}\right)}{\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\left(\frac{2\pi^2 pkT}{\mu H}\right)} \right\}, \qquad (14)$$

относительно вида которой в анизотропном случае и возможностей ее сравнения с экспериментальными данными ничего сказать нельзя.

С точки зрения задачи дальнейших экспериментальных исследований этот вывод означает необходимость детального исследования каждой компоненты экспериментальной зависимости $\Delta\chi(1/H)$ в соответствующих ей малых полях, чтобы при всех ориентировках кристалла отношение $\frac{2\pi^2 kT}{\mu H}$ было больше единицы и данные опыта можно было бы сравнивать с простейшими теоретическими выражениями типа уравнений (7) и (8), пытаясь найти такие значения параметров теории, которые позволили бы описать угловую зависимость периодов и амплитуд при всех возможных значениях θ и φ.

В теории, основанной на предположении о произвольности закона дисперсии квази-частиц, обусловливающих наличие явления де-Хааза — ван-Альфена [15]:

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{eh}{c}\cdot\frac{1}{S_m(\xi)}, \qquad (15)$$

где $S_m(\xi)$ — максимальная площадь сечения граничной поверхности Ферми плоскостью, перпендикулярной к вектору магнитного поля. Таким образом, приведенные на рис. 10 и 11 кривые представляют угловую зависимость максимального сечения граничной поверхности Ферми при двух ориентировках кристалла. Различный характер угловой зависимости, выраженной кривыми *1*, *2* и *3* каждого из этих рисунков, свидетельствует в пользу представления о том, что различные компоненты кривых $\Delta\chi(1/H)$ у цинка соответствуют различным электронным группам, точнее — различным незаполненным энергетическим зонам в металле, в каждой из которых движение электронов независимо. Каждая такая группа электронов имеет свою величину $S_m(\xi)$, угловая зависимость которой определяется графиками рис. 10 и 11.

Для решения задачи о воспроизведении формы поверхности Ферми на основании полученных в данной работе экспериментальных данных необходимо решить вопрос о структуре этой поверхности для каждой группы электронов, могущей обеспечить наблюдаемую периодичность $C_z(\varphi)$. Иными словами, необходимо выяснить вопрос о том, является ли поверхность Ферми поверхностью сложной формы, обеспечивающей необходимую периодичность $C_z(\varphi)$, или попрежнему необходимо говорить о

наличии для каждой группы электронов трех поверхностей Ферми, совмещаемых поворотом на угол $\pi/3$ в базисной плоскости. В последнем случае теоретические формулы неудобны для сравнения с опытом даже при

$$\lambda = \frac{\pi c\, kT}{|e|\hbar H}\left(\frac{\partial S_m}{\partial E}\right)_\zeta \gg 1. \qquad (16)$$

К числу других трудностей решения задачи о воспроизведении формы поверхности Ферми относятся: отсутствие метода выделения отдельных компонент тонкой структуры явления в широком интервале полей*, трудность сравнения экспериментальных данных для каждой компоненты с теорией при $\lambda \gg 1$, но произвольной ориентировке кристалла, когда число слагаемых в формулах для магнитного момента больше двух (в результате сложности структуры поверхности,— вероятнее всего три поверхности, а не одна), невозможность использования экспериментальных данных, соответствующих большим полям (малым квантовым числам) для каждой компоненты, когда $\lambda \sim 1$, а возможно, и $\zeta/\mu H \sim 1$.

Возможность описания результатов исследования цинка при двух ориентировках кристалла для больших θ (где $\lambda \gg 1$) формулами теории, основанной на модели свободных электронов, позволяет предположить, что форма поверхности Ферми близка к эллипсоиду, хотя закон дисперсии и может отличаться от квадратичного.

Наконец, следует заметить, что для определения основных параметров теории, основанной на модели свободных электронов, были использованы результаты экспериментальных иследований при больших θ, причем были получены следующие значения параметров:

а) основная компонента явления (самая малочисленная группа электронов) —

$m_1 \approx 0{,}016\, m_0$, $m_2 \approx 0{,}023\, m_0$, $m_3 \approx 2{,}5\, m_0$, $E_0 \approx 0{,}01$ eV, $n \approx 6 \cdot 10^{-6}$;

б) одна из компонент тонкой структуры — кривые *2* рис. 10 и рис. 11 $\left(\text{при всех } \theta\ \frac{2\pi^2 kT}{\mu H} > 1\right)$ —

$m_1 \approx 1{,}7\, m_0$, $m_2 \approx 0{,}42\, m_0$, $m_3 \approx 0{,}011\, m_0$, $E_0 \approx 0{,}045$ eV, $n \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

Как заметил нам Г. Е. Зильберман, периодичность кривых $\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{\mu}{E_0}(\theta)$ в области больших θ можно объяснить учетом зависимости E_0 от H [22]. Тогда

$$\frac{\mu}{E_0} = \frac{\mu}{E_{00}}\left[1 - \sqrt{2\pi^3}\frac{kT}{\sqrt{E_{00}\mu H}}\exp\left\{-\frac{2\pi^2 kT}{\mu H}\right\}\cos\left(\frac{2\pi E_{00}}{\mu H} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (17)$$

причем амплитуда периодического слагаемого, например при $\frac{E_{00}}{\mu H} \sim 3 \div 4$ и $\frac{kT}{\mu H} \sim \frac{1}{\pi^2}$, составляет несколько процентов от величины первого слагаемого.

8. Выводы

При исследовании зависимости разности восприимчивостей монокристаллов цинка от поля при двух установках кристалла мы обнаружили наличие «тонкой» и «сверхтонкой» структур явления и получили кривые угловой зависимости периодов и амплитуд трех компонент явления. Различный характер угловой зависимости периодов $\left(\frac{\mu}{E_0}\right.$ или $\left.\frac{eh}{c}\cdot\frac{1}{S_{m(\xi)}}\right)$ трех компонент является первым экспериментальным свидетельством в поль-

* Наличие такого метода особенно необходимо для расшифровки результатов экспериментальных исследований слабо анизотропных металлов.

зу представления о существовании различных групп электронов, каждая из которых отчасти обусловливает явление сложной периодической зависимости восприимчивости от поля. Мы выяснили, что в области больших углов между вектором поля и главной осью кристалла величина $\frac{\mu}{E_0}\left(\text{или } \frac{eh}{c}\cdot\frac{1}{S_m(\xi)}\right)$ периодически изменяется с увеличением угла, и обнаружили наличие максимумов на кривых зависимости амплитуд от угла θ при $H = \text{const}$, смещающихся при увеличении поля в область больших углов. Максимумы на кривых угловой зависимости амплитуд соответствуют отклонениям от линейности зависимости

$$\ln(\Delta\chi)_{\text{ампл}} + \frac{3}{2}\ln H \text{ от } \frac{1}{H}.$$

Мы обнаружили также отклонение от линейности зависимости $n(1/H)$ в области малых n (больших полей).

Результаты эксперимента мы сравнили с теорией явления, основанной на модели свободных электронов, с которой они находятся (для основной компоненты, т. е. для самой малочисленной группы электронов) в удовлетворительном согласии в области больших углов θ.

Результаты эксперимента могут быть использованы для решения задачи о воспроизведении формы граничной поверхности Ферми после преодоления ряда трудностей, сформулированных в работе.

Для дальнейших экспериментальных исследований и надежных попыток сравнения экспериментальных данных с теорией необходимо изучение угловой зависимости периодов и амплитуд каждой компоненты в соответствующих ей малых полях.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Б. Г. Лазареву за постоянный интерес к работе, И. М. Лифшицу и Г. Е. Зильберману за ценные дискуссии, а также Е. К. Погребняк за помощь в обработке экспериментальных данных.

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Цитированная литература

1. Schubnikow L., de Haas W., Leid. Comm., No. 207 d, No. 210a (1930).
2. De Haas W., van Alfvén P., Leid. Comm., No. 212 a, No. 220d (1932).
3. Landau L., ZS. f. Phys., 64, 629 (1930); Добавление к статье Shoenberg D., Proc. Roy. Soc., 170A, 341 (1939).
4. Ахиезер А., ДАН СССР, 23, 872 (1939).
5. Зильберман Г., ЖЭТФ, 21, 1209 (1951).
6. Shoenberg D., ЖЭТФ, 8, 1271 (1938).
7. Давыдов Б., Померанчук И., ЖЭТФ, 9, 1294 (1939).
8. Боровик Е., ЖЭТФ, 23, 91 (1952).
9. Marcus J., Phys. Rev., 71, 559 (1947).
10. Веркин Б., Лазарев Б., Руденко Н., ЖЭТФ, 20, 995 (1950); 21, 658 (1951); ДАН СССР, 80, 45 (1951).
11. Shoenberg D., Phil. Trans. of the Roy. Soc. London, A245, 1 (1952).
12. Shoenberg D., Physica, 19, 791 (1953).
13. Berlincourt T., Phys. Rev., 92, 1068 (1953).
14. Веркин Б., Дмитренко И., Михайлов И., ДАН СССР, 101, 34 (1955).
15. Лифшиц И., Косевич А., ДАН СССР, 96, 963 (1954).
16. Лифшиц И., Погорелов А., ДАН СССР, 96, 1143 (1954).
17. Веркин Б., Михайлов И., ЖЭТФ, 25, 471 (1953).
18. Флинт Е. Е., Практическое руководство по геометрической кристаллографии.— Госгеолиздат, М., 1948.
19. Sidoriak S., Robinson D., Phys. Rev., 75, 118 (1949).
20. Веркин Б., Лазарев Б., Руденко Н., ДАН СССР, 73, 59 (1950).
21. Румер Ю., ЖЭТФ, 18, 1081 (1948).
22. Зильберман Г., ЖЭТФ, 25, 713 (1953).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

Е. С. БОРОВИК

ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ В МЕТАЛЛАХ

Введение

После работы П. Л. Капицы [1], исследовавшего изменение сопротивления большинства металлов в полях до $3 \cdot 10^5$ Ое до температуры кипения жидкого азота, было выяснено, что эффект сильно увеличивается при дальнейшем понижении температуры при условии применения достаточно чистых металлов [2—4]. При температурах 2÷4° К в полях $\sim 10^4$ Ое для ряда металлов наблюдается увеличение сопротивления в сотни, тысячи, а для висмута и в миллионы раз. Резкое увеличение эффекта объясняется увеличением длины свободного пробега электронов в чистых металлах при этих температурах в 10^3—10^4 раз. Так как влияние магнитного поля определяется величиной вызванного им возмущения в движении электронов на протяжении длины свободного пробега, то увеличение длины свободного пробега в 10^3—10^4 раз эквивалентно соответственному увеличению эффективной величины магнитного поля. Такая точка зрения подтверждается и тем, что, если, по предложению Колера [5], нанести на график относительное увеличение сопротивления в виде зависимости его не непосредственно от величины магнитного поля, а от величины произведения магнитного поля на электропроводность, то в таких координатах результаты измерения при разных температурах ложатся приблизительно на одну кривую.

Таким образом, исследования гальваномагнитных явлений при низких температурах надо рассматривать, в первую очередь, как измерения в больших эффективных полях и лишь затем исследовать специфическое влияние низких температур. Это специфическое влияние низких температур сказывается, например, в наложении на плавную кривую возрастания сопротивления с увеличением магнитного поля некой периодической зависимости сопротивления от поля. Это явление было открыто Шубниковым и де-Хаазом у висмута [2] и затем наблюдено Б. Г. Лазаревым, Н. М. Нахимовичем и Е. А. Парфеновой у цинка [3] и автором у олова [6].

Существующий обширный экспериментальный материал относительно изменения сопротивления металлов при низких температурах позволил Юсти [4, 7] разделить исследованные металлы на два класса: металлы, у которых наблюдается неограниченный рост сопротивления в магнитном поле (Bi, Cd, Ga, W и т. д.), и металлы, у которых с увеличением поля сопротивление не возрастает неограниченно, а стремится к некоторому пределу (Al, In, Na). Затруднения теории в объяснении большого увеличения сопротивления в магнитном поле разрешились с привлечением представления о том, что проводимость в металлах осуществляется одновременно двумя сортами квази-частиц с двумя знаками заряда [8, 9], появляющимися при учете возможности перекрытия энергетических зон Бриллюэна. При этом неограниченный рост сопротивления получается у тех металлов, у которых подвижные заряды обоих знаков имеются в равном числе. Однако экспериментальные данные, подтверждающие вывод теории о том, что ограниченный рост сопротивления связан с влиянием неограниченно воз-

растающего поля Холла, практически отсутствовали, так как после работ Камерлинг-Оннеса и др.]10], выполненных еще в 1914 г., появились лишь исследования эффекта Холла у висмута [11], натрия [12] и графита [13], удовлетворяющие условию получения больших эффективных полей, т. е. исследования достаточно чистых металлов при низких температурах.

Работы по исследованию эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле, как правило, велись отдельно, взаимосвязь этих явлений не исследовалась. Ввиду очень сильного влияния примесей на электропроводность металлов при низких температурах точные сведения о взаимосвязи гальваномагнитных явлений можно получить лишь при совместном исследовании их на одном образце.

1. Экспериментальные данные

Настоящая работа посвящена исследованию гальваномагнитных явлений при низких температурах и определению из результатов этих исследований свойств электронов проводимости в металлах.

Совместные исследования эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле проведены нами на восьми металлах: в числе их один металл первой группы периодической системы элементов (Cu), три металла второй группы (Be, Mg, Zn), два металла третьей группы (Al, In) и два металла четвертой группы (Sn, Pb) [14—16]. Проведение исследований на чистых металлах при достаточно низкой температуре обеспечило достижение области больших эффективных полей, при которых период ларморовой прецессии меньше среднего времени между столкновениями электронов с решеткой.

Обычно как в экспериментальных, так и в теоретических работах эффект Холла характеризуют постоянной Холла R. Общий итог экспериментальных исследований в отношении постоянной Холла можно сформулировать так: постоянная Холла для исследованных металлов не зависит от величины магнитного поля только в области, где увеличение сопротивления в магнитном поле незначительно [14, 15]. При наличии существенного увеличения сопротивления значение постоянной Холла зависит от величины магнитного поля. Исключением из этого правила, возможно, является поведение щелочных металлов.

Зависимость постоянной Холла от поля большей частью довольно сложна и отличается индивидуальными особенностями для разных металлов [14, 15]. Выделить какую-либо общую закономерность, присущую отдельным группам металлов, затруднительно. Это является естественным следствием того, что в больших полях R является функцией одновременно двух явлений: эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле [14].

Существенно более ясная картина получится, если характеризовать эффект Холла в области больших полей безразмерным параметром — отношением поля Холла (E_y) к электрическому полю в направлении тока (E_x), т. е. E_y/E_x. Мы измеряли величину E_y/E_x непосредственно. Величины E_y/E_x можно получить и для имеющихся в литературе данных по эффекту Холла для Bi [11], C (графита) [13], Cd [10] и Na [12], сопоставляя их с данными по изменению сопротивления. Однако полученные путем такого сопоставления величины не обладают большой точностью.

По характеру зависимости отношения E_y/E_x от величины магнитного поля исследованные металлы можно разделить на два класса: у первого, к которому относятся Be, Mg, Zn, Cd, Sn, Pb, C (графит) и Bi, абсолютные значения E_y/E_x с увеличением магнитного поля переходят через максимум и затем убывают в больших полях (рис. 1); у второго класса, к которому относятся Al, In, Cu, Na, абсолютные значения E_y/E_x в больших полях безгранично возрастают (рис. 2, кривая 1). При этом, если у металлов первого класса абсолютные значения E_y/E_x обычно не превышают нескольких

десятых или сотых долей единицы, то у металлов второго класса значение поля Холла может превышать величину электрического поля в направлении тока, например у Al в наибольших исследованных полях $E_y/E_x > 2$. Из отдельных деталей полученных результатов следует отметить, что у In, Al, Mg и для некоторых ориентаций монокристаллов Zn [18] наблюдается изменение знака эффекта Холла с изменением температуры, а при самых низких температурах и с увеличением магнитного поля.

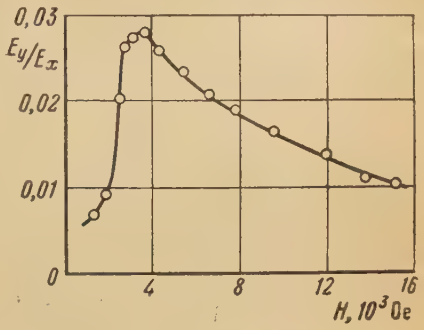


Рис. 1. Эффект Холла для образца Zn-2 при $T = 4{,}22°$ K

В результате совместных исследований эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле установлена тесная связь между видом зависимости E_y/E_x от величины магнитного поля и характером изменения сопротивления в магнитном поле: у тех металлов, у которых в больших магнитных полях наблюдается уменьшение поля Холла (рис. 1), сопротивление увеличивается неограниченно (рис. 3, кривая *II*). У металлов с неограниченным ростом поля Холла (рис. 2, кривая *1*) сопротивление в магнитном поле стремится к некоторому пределу (рис. 2, кривая *3*).

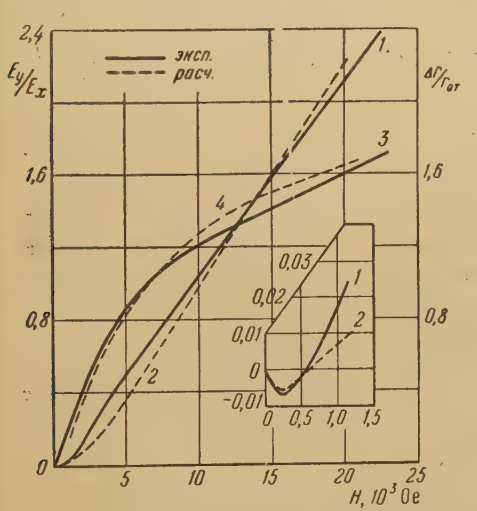


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и расчетных величин поля Холла и изменения сопротивления в магнитном поле для алюминия. Образец Al-4, $T = 4{,}22°$ K. Кривые *1*, *2* — E_y/E_x; кривые *3*, *4* — $\Delta r/r_{0T}$

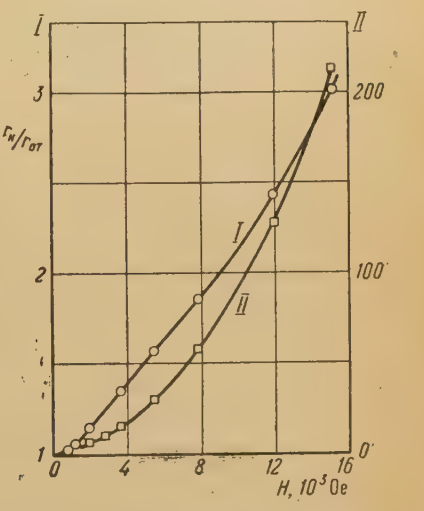


Рис. 3. Зависимость изменения сопротивления образца Zn-2 от магнитного поля: *I* — при $T = 20{,}4°$ K, *II* — при $T = 4{,}22°$ K (H перпендикулярно плоскости пластинки)

Если классифицировать металлы по характеру изменения сопротивления в больших магнитных полях, то в настоящее время к числу металлов, у которых наблюдается неограниченный рост сопротивления в магнитном поле, следует отнести Bi [1, 2], Sb [1], As [1], Ga [19], W [20], Cd [21], Be [22], Zn [3], Pb [23], Sn [6], C и Mg [15]. Повидимому, к числу таких металлов следует также отнести Mo [24] и Ba [25], хотя при использованных в исследованиях полях увеличение их сопротивления не превышает нескольких единиц. Перечисленные выше металлы приведены в хронологической последовательности открытия у них большого (порядка 10^2—10^3 и больше)

увеличения сопротивления в магнитном поле. Для Al, In и Na экспериментально установлено [4, 12, 15], что в больших магнитных полях их сопротивление возрастает медленно и, видимо, стремится к некоторому предельному значению.

В результате сопоставления данных, полученных нами, и литературных данных, можно считать, что для металлов, исследованных до больших магнитных полей, кривая изменения сопротивления в магнитном поле $\Delta r/r_{0T}$* имеет следующий вид. При значениях $\Delta r/r_{0T} < 10^{-2}$ наблюдается приблизительно квадратичный рост величины $\Delta r/r_{0T}$ с полем, а затем в интервале $10^{-2} < \Delta r/r_{0T} < 10$ наблюдается замедленное возрастание сопротивления, переходящее для ряда металлов в линейную зависимость, впервые наблюденную Капицей [1]. На рис. 3 (кривая *I*) хорошо виден этот линейный участок у Zn при $T = 20{,}4°$ K.

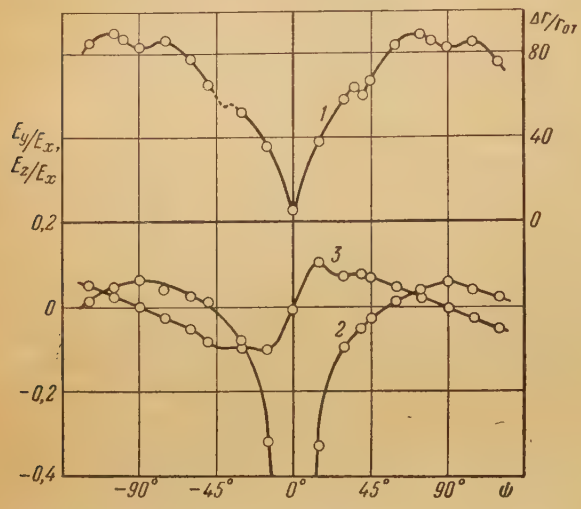


Рис. 4. Эффект Холла и изменение сопротивления образца Sn-6. Диаграмма вращения при T=4,22°K, H = 14 880 Oe. Кривая *1* — $\Delta r/r_{0T}$; кривая *2* — E_y/E_x; кривая *3* — E_z/E_x; ψ — угол между осью симметрии четвертого порядка и направлением магнитного поля (при $\psi = 0°$ $E_y/E_x = -2{,}46$)

Для металлов класса Al и др. при $\Delta r/r_{0T} \sim 1$ увеличение сопротивления замедляется еще больше и сопротивление почти не зависит от величины магнитного поля. Для металлов класса Sn, Zn и др. после почти линейного участка кривой в больших полях зависимость снова становится квадратичной. Эта «вторая квадратичная зависимость» имеет место при увеличении поля во всем исследованном интервале полей [15]. Коэффициент при второй квадратичной зависимости существенно меньше, чем коэффициент при квадратичной зависимости в малых полях при $\Delta r/r_{0T} < 10^{-2}$. Как будет показано ниже, эта особенность кривых приведет к важным выводам при сравнении с теорией.

Все сказанное относится к средней величине эффекта увеличения сопротивления в поперечном магнитном поле. Исследования, проведенные на монокристаллах, показывают, что отмеченная выше общая закономерность сохраняется, но отношение коэффициентов при квадратичных зависимостях в больших и малых полях для разных ориентировок монокристаллов будет различным.

Исследование изменения сопротивления монокристалла олова в магнитном поле при вращении его вокруг продольной оси образца, параллельной току в образце и перпендикулярной к полю, показало, что для кристалла, у которого ось симметрии четвертого порядка перпендикулярна к оси образца, получается очень большая величина анизотропии сопротивления в магнитном поле [6]. При температуре 4,2° K в поле $H = 2 \cdot 10^4$ Oe сопротивление при вращении кристалла изменяется почти в 20 раз, причем минимум сопротивления получается тогда, когда ось симметрии четвертого порядка параллельна магнитному полю. Величина анизо-

* Δr — увеличение сопротивления в магнитном поле, r_{0T} — сопротивление при $H = 0$ и температуре опыта T.

тропии сопротивления растет с увеличением поля. Такие аномально глубокие минимумы сопротивления наблюдались и ранее для некоторых ориентаций Ga [19], Zn [3], Ca [3, 26] и, возможно, Au[17]. Появление таких аномально глубоких минимумов довольно неожиданно, так как известно, что анизотропия электропроводности в отсутствие магнитного поля для олова составляет примерно 40%, а для прочих металлов еще меньше.

В тех положениях кристалла, в которых появляются такие аномальные минимумы, как правило, изменяются не только величина сопротивления, но и вид зависимости сопротивления от магнитного поля. Сопротивление в этом случае возрастает медленнее, чем для других ориентаций. Ранее было показано, что замедленное возрастание сопротивления в магнитном поле связано с влиянием большой величины поля Холла. В связи с этим можно предположить, что малое значение сопротивления в магнитном поле и изменение характера его зависимости от величины поля для некоторых ориентаций металлических кристаллов также связаны с влиянием поля Холла.

Исходя из этого, мы предприняли исследование анизотропии эффекта Холла у олова и цинка и для сравнения у индия, у которого анизотропия сопротивления в магнитном поле мала. Исследований анизотропии эффекта Холла при гелиевых температурах ранее не производилось.

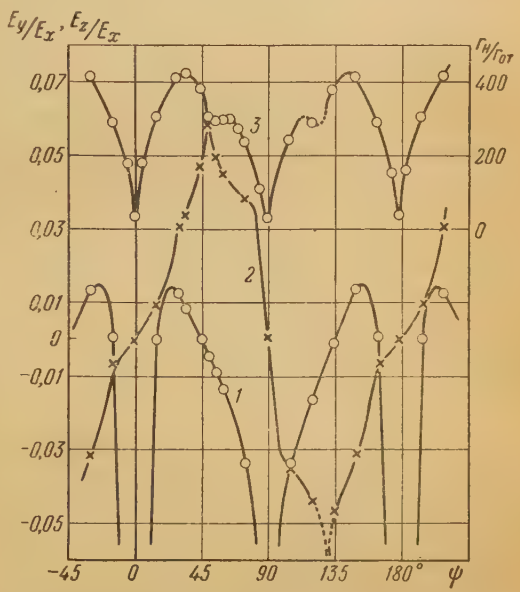


Рис. 5. Эффект Холла и изменение сопротивления образца Zn-10. Диаграмма вращения при $T = 4{,}22°$ К, $H = 20\,200$ Ое. Кривая *1* — E_y/E_x; кривая *2* — E_z/E_x; кривая *3* — r_H/r_{0T}; ψ — угол между осью симметрии шестого порядка и направлением магнитного поля (при $\psi = 0°$ $E_y/E_x = -0{,}69$; при $\psi = 90°$ $E_y/E_x = -0{,}47$)

У индия анизотропия эффекта Холла, как и анизотропия изменения сопротивления в магнитном поле оказались малыми [17]. У олова и цинка [16—18] на диаграмме вращения минимумам сопротивления в магнитном поле соответствуют максимумы абсолютного значения поля Холла (рис. 4, 5). Анизотропия поля Холла столь же велика или даже больше, чем анизотропия сопротивления. По абсолютной величине максимальные значения поля Холла превышают минимальные в десятки раз. Составляющая поля Холла, параллельная магнитному полю E_z, отлична от нуля, и таким образом поле Холла в общем не перпендикулярно к магнитному полю. Поле Холла перпендикулярно к магнитному полю, только когда последнее параллельно одному из главных направлений кристалла. Минимумам сопротивления отвечают максимумы абсолютной величины поля Холла, причем для аномально глубоких минимумов величина E_y/E_x может быть даже больше единицы.

Сложный характер анизотропии поля Холла в больших магнитных полях не позволяет ограничиваться изучением эффекта лишь для главных направлений — необходимо снимать всю диаграмму вращения.

Для цинка, когда гексагональная ось параллельна магнитному полю, на кривой для E_y/E_x наблюдаются нерегулярности — наложение осцилляций на плавную кривую (рис. 6). Расположение этих осцилляций по-

добно наблюдавшимся ранее [3] на кривой изменения сопротивления, однако здесь они проявляются значительно резче. Сравнение кривых *1* и *2* с *5* и *6* показывает, что период осцилляций E_y/E_x—того же порядка, что и период осцилляций магнитной восприимчивости [27, 28]. Хотя нельзя считать, что осцилляции на кривой эффекта Холла находятся в простой связи с осцилляциями магнитной восприимчивости, но все же можно думать, что причина обоих этих явлений одна и та же — наличие осцил-

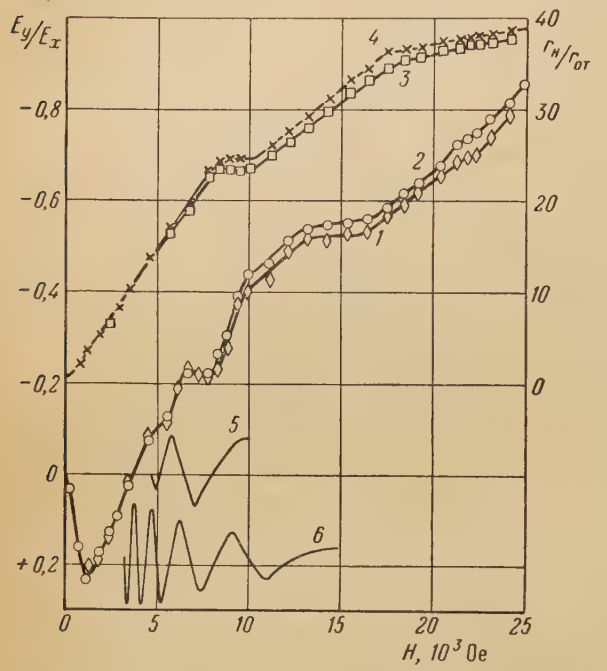


Рис. 6. Зависимость величины поля Холла и изменения сопротивления у образца Zn-10 от величины магнитного поля; $\psi = 0$. Кривые *1* и *3* измерены при $T = 1{,}81°$ K, кривые *2* и *4* — при $T = 4{,}22°$ K; кривые *1* и *2* —E_y/E_x, кривые *3* и *4* — $\Delta r/r_{0T}$, *5* — магнитная восприимчивость $\varkappa$ ($\psi = 0°$, $T = 14°$ K) [27], *6* — разность главных восприимчивостей $\Delta\varkappa$ ($T = 4{,}22°$ K) [28]

лирующего члена в выражении для термодинамического потенциала электронного газа в магнитном поле, следующего из теории Л. Д. Ландау. Мы не будем обсуждать подробнее вопрос о квантовых осцилляциях, так как он лежит вне основного направления нашего исследования.

2. Сравнение экспериментальных данных с теорией

Рассмотрим, в каком соотношении находятся полученные результаты с данными современной теории. До недавнего времени теория испытывала затруднения при объяснении неограниченного возрастания сопротивления в магнитном поле, наблюдавшегося у большинства металлов. Теория давала кривую с насыщением. Основа затруднений теории лежит в получающемся по вычислениям неограниченном линейном росте поля Холла с возрастанием магнитного поля. Это затруднение может быть устранено лишь привлечением двухзонной модели с равным числом «дырок» и электронов. Следует указать, что равное число дырок и электронов естественно получается для металлов четных групп периодической системы с простейшей решеткой и для ряда металлов нечетных групп с более сложной решеткой. Подобную модель впервые рассчитали Д. Блохинцев и Л. Нордгейм [8] и после них ею пользовался ряд авторов [29—32]; однако лишь в итоге последних работ [9, 33] стало ясно, что нужный результат получается из этой модели независимо от предположений об анизотропии металла и способа учета ряда других второстепенных обстоятельств. Теория [9] формулируется для изотропного металла в предположении квадратичной связи между квази-импульсом и энергией электрона, так что формально отличие от теории свободного электрона сводится к введению

эффективной массы и предположению о существовании частиц с зарядом обоих знаков. Теория развита для вполне вырожденного электронного газа. Результаты теории в отношении эффекта Холла даны в виде выражений для постоянной Холла [34]. Однако из имеющихся теоретических результатов легко получить простое выражение для E_y/E_x.

Пусть в изотропном металле электроны проводимости распределены между двумя зонами Бриллюэна так, что число свободных мест на единицу объема в нижней почти заполненной зоне равно n_1, а в верхней почти пустой зоне на единицу объема приходится n_2 электронов. Как известно, поведение электронов нижней зоны эквивалентно поведению n_1 частиц с зарядом $+e$ и некоторой эффективной массой m_1. Обозначим через τ_1 среднее время между столкновениями этих частиц с решеткой. Соответствующие величины для n_2 электронов с зарядом $-e$ обозначим m_2 и τ_2.

Если мы примем во внимание обе группы подвижных зарядов, то электропроводность в отсутствие поля

$$\sigma_{0T} = n_1 \frac{e^2\tau_1}{m_1} + n_2 \frac{e^2\tau_2}{m_2} = \sigma_{01} + \sigma_{02}, \tag{1}$$

электропроводность в магнитном поле

$$\sigma_H = \left(\frac{\sigma_{01}}{1+\varphi_1^2} + \frac{\sigma_{02}}{1+\varphi_2^2}\right)\left[1+\left(\frac{E_y}{E_x}\right)^2\right], \tag{2}$$

где $\varphi_1 = \frac{eH\tau_1}{m_1 c}$, $\varphi_2 = \frac{eH\tau_2}{m_2 c}$. Для поля Холла имеем:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\dfrac{n_1\varphi_1^2}{1+\varphi_1^2} - \dfrac{n_2\varphi_2^2}{1+\varphi_2^2}}{\dfrac{n_1\varphi_1}{1+\varphi_1^2} + \dfrac{n_2\varphi_2}{1+\varphi_2^2}} \tag{3}$$

или в менее симметричном, но более удобном для вычислений виде:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\varphi_1^2\varphi_2^2 + \left(\frac{n_1}{n_2}\varphi_1^2 - \varphi_2^2\right)}{\left(\frac{n_1}{n_2}\varphi_1 + \varphi_2\right) + \left(\frac{n_1}{n_2}\varphi_2 + \varphi_1\right)\varphi_1\varphi_2}. \tag{4}$$

Если число «дырок» равно числу электронов, т. е. $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$, то формула (4) принимает вид:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{1+\varphi_1\varphi_2}. \tag{5}$$

После подстановки (5) в (2) и некоторых преобразований получаем:

$$\frac{\Delta r}{r_{0T}} = \frac{\sigma_{0T}}{\sigma_H} - 1 = \varphi_1\varphi_2. \tag{6}$$

Из формул (1)—(6) видно, что E_y/E_x и σ_H/σ_{0T} являются функциями безразмерных величин φ_1 и φ_2. Эти величины могут служить мерилом эффективного магнитного поля. Величина φ для свободных электронов имеет простой наглядный смысл — это угол поворота траектории электрона за время τ.

В малых полях $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$ поведение металлов с $n_1 \neq n_2$ и $n_1 = n_2$ не различается существенно. В обоих случаях с увеличением магнитного поля получается линейное возрастание поля Холла и квадратичное увеличение сопротивления.

В больших полях $\varphi_1, \varphi_2 \gg 1$ у металлов с $n_1 = n_2$ $E_y/E_x \sim 1/H$ и $\frac{\Delta r}{r_{0T}} \sim H^2$; у металлов с $n_1 \neq n_2$ в больших полях $E_y/E_x \sim H$, и вследствие линейного возрастания поля Холла σ_H/σ_{0T} не убывает безгранично,

как в первом случае, а стремится к пределу

$$\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{0T}}\right)_{\varphi\gg 1} \approx \frac{(n_1-n_2)^2}{n_1^2+n_2^2+n_1n_2(\varphi_1/\varphi_2+\varphi_2/\varphi_1)}. \qquad (7)$$

Таким образом, качественно свойства моделей с $n_1 = n_2$ и $n_1 \neq n_2$ соответствуют поведению описанных выше двух групп металлов.

Металлы, у которых число дырок равно числу электронов, т. е. $n_1 = n_2$, дают поле Холла, убывающее в больших магнитных полях, и безгранично возрастающее сопротивление (Zn, Be и др.).

Металлы, у которых число дырок не равно числу электронов ($n_1 \neq n_2$), дают безгранично возрастающее поле Холла и кривую сопротивления в магнитном поле, стремящуюся к предельному значению (In, Al).

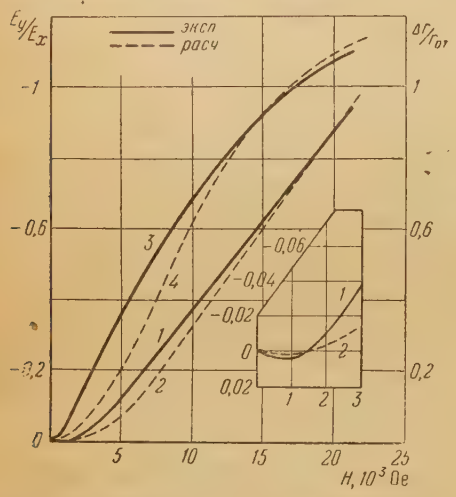


Рис. 7. Сравнение экспериментальных и расчетных величин поля Холла и изменения сопротивления в магнитном поле для образца In-4 при T=4,22° K. Кривые *1*, *2* — E_y/E_x, кривые *3*, *4* — $\Delta r/r_{0T}$

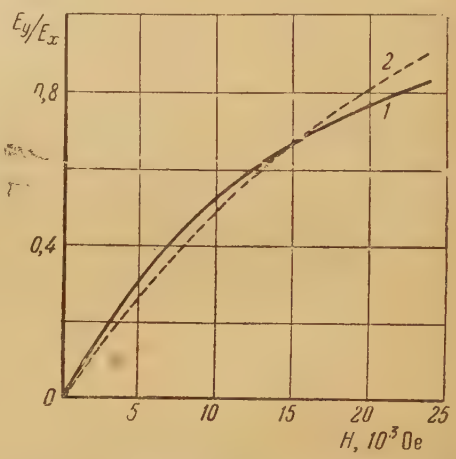


Рис. 8. Сравнение экспериментальных (*1*) и расчетных (*2*) величин поля Холла для образца Cu-14 при T = 4,22° K

Несмотря на то что эта теория является грубо приближенной, желательно провести по возможности подробное количественное сравнение ее с результатами опыта. Сравнивая опытные данные для E_y/E_x и $\Delta r/r_{0T}$ с формулами (1)—(6), можно вычислить величины φ_1 и φ_2 и, следовательно, определить подвижности дырок и электронов. Сравнивая полученные данные о подвижности и экспериментальные значения электропроводности в отсутствие магнитного поля, можно, пользуясь формулой (1), вычислить концентрации подвижных частиц.

Алюминий и индий относятся к числу металлов с $n_1 \neq n_2$. В этом случае возможно сравнение теории с экспериментальными данными во всем интервале исследованных полей. Вычисление облегчается тем, что для обоих металлов достигнута область магнитных полей, где наблюдается линейный рост E_y/E_x и сопротивление приближается к своему предельному значению. Для меди картина не столь типична [15], однако большая величина эффекта Холла и замедленное возрастание сопротивления в магнитном поле заставляют предполагать, что медь относится к металлам, у которых $n_1 \neq n_2$. Это отвечает и положению меди в периодической системе элементов. При вычислениях подбирают параметры в формулах (2)—(4) так, чтобы теоретические кривые по возможности совпадали с экспериментальными. На рис. 2, 7, 8 приведены вычисленные и экспериментальные кривые для алюминия, индия и меди. Вычисленные кривые в общем удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными,

хотя в области средних полей между кривыми имеется некоторое различие. Неполное совпадение кривых показывает, что используемая для вычислений теория является качественно правильной, но не может описать все детали экспериментальных кривых.

При количественном сравнении с теорией для металлов с $n_1 = n_2$ следует иметь в виду, что формулы (5) и (6) не отражают экспериментально наблюдаемого замедления возрастания сопротивления в средних полях и зависимости постоянной Холла от величины поля. Теория лучше отражает экспериментальные данные в области больших полей. Поэтому при сравнении с теорией для металлов этого типа следует брать значения E_y/E_x и $\Delta r/r_{0T}$ при максимальных величинах поля, при которых проведено исследование.

Значения подвижностей и концентраций подвижных зарядов, вычисленные из экспериментальных данных о E_y/E_x, $\Delta r/r_{0T}$ и σ_{0T} по формулам (1)—(4) для Cu, Al, In и по формулам (1), (5) и (6) для Be, Zn, Sn, Pb и Bi, приведены в табл. 1. Приведенные в таблице для Be, Zn, Sn и Bi данные относятся к монокристаллам. Ориентации монокристаллов выбирались так, что для них величина исследуемых эффектов не сильно отличалась от средних. Остальные данные относятся к поликристаллам.

Таблица 1

Значения подвижностей и концентраций подвижных частиц, вычисленные из экспериментальных данных о E_y/E_x

Образец	T, °K	$\frac{r_{0T}}{r_{00}}$*	$\frac{\tau_1}{m_1} \cdot 10^{-16}$	$\frac{\tau_2}{m_2} \cdot 10^{-16}$	$\frac{n_2}{n_1}$	$\frac{n_1}{n_A}$	$\frac{n_2}{n_A}$
Cu-14	4,22	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$	0,25	0,47	2,5	0,32	0,81
In-4	4,22	$1{,}7 \cdot 10^{-3}$	0,94	0,44	4,8	0,23	1,1
Al-4	4,22	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	1,1	2,1	0,23	1,1	0,26
Be-1	20,4	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	1,9	0,8	1	0,028	0,028
Zn-2	4,22	$4{,}7 \cdot 10^{-4}$	6,5	5,6	1	0,16	0,16
Pb-1	1,86	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	6,2	6,8	1	0,5	0,5
Sn-6	4,22	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$	5,0	2,7	1	0,35	0,35
Bi VII **	64	0,312	5,2	5,1	1	$0{,}42 \cdot 10^{-4}$	$0{,}42 \cdot 10^{-4}$

Для металлов с неограниченным возрастанием сопротивления в магнитном поле, у которых по представлениям теории число дырок равно числу электронов ($n_1 = n_2$), можно получить некоторые сведения о подвижности и концентрации подвижных частиц и в том случае, если исследовалось лишь изменение сопротивления в магнитном поле. Из изменения сопротивления по формуле (6) можно вычислить среднее геометрическое из подвижностей дырок и электронов $\sqrt{(\tau_1/m_1)(\tau_2/m_2)}$ и затем, подставив это значение в формулу (1) вместо среднего арифметического, вычислить приближенно концентрацию подвижных частиц. Оценка по данным табл. 1 показывает, что допускаемая при таком вычислении ошибка невелика. Вычисления следует производить для возможно больших магнитных полей в области второй квадратичной зависимости. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

---

* $\frac{r_{0T}}{r_{00}}$ — отношение сопротивления образца при температуре опыта к его сопротивлению при 0 °C; $\frac{n_2}{n_1}$ — отношение концентраций электронов и дырок; $\frac{n_1}{n_A}$ — число дырок на один атом; $\frac{n_2}{n_A}$ — число электронов на один атом.

** По данным работ [11, 2].

Таблица 2

Значения подвижностей и концентраций подвижных частиц, вычисленные по формуле (1) из литературных данных

Металл	T, °K	$\frac{r_{0T}}{r_{00}}$	$\sqrt{\frac{\tau_1}{m_1}\cdot\frac{\tau_2}{m_2}}\cdot 10^{-16}$	n/n_A	Литературная ссылка
Sb	80	0,33	0,134	$7\cdot10^{-3}$	[1]
Cd	4,22	$2{,}9\cdot10^{-4}$	9,8	0,38	[15]
Ba	4,22	$7{,}87\cdot10^{-3}$	0,32	0,16	[25]
Ga	4,22	$1\cdot10^{-3}$	3,3	0,04	[19]
Mo	14	$7{,}68\cdot10^{-3}$	0,36	0,42	[24]
W	4,22	$3{,}47\cdot10^{-4}$	9,4	0,38	[20]

В табл. 2 приведены данные для поликристаллов или усредненные данные для монокристаллов.

Для большинства металлов, данные для которых приведены в табл. 1 и 2, расчет дает для числа подвижных зарядов на атом величину, лежащую в пределах 0,1 ÷ 1, т. е. получаются разумные значения, которые можно ожидать при заметном перекрытии зон.

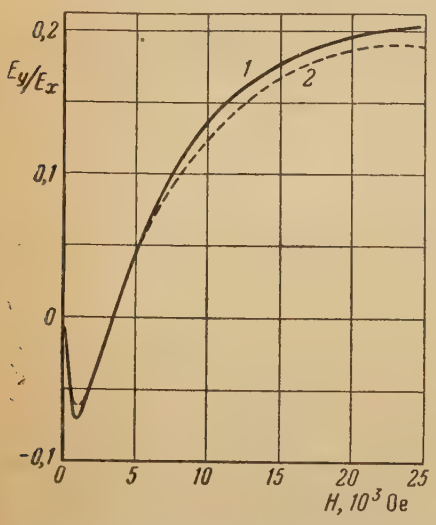


Рис. 9. Сравнение экспериментальных (*1*) и расчетных (*2*) значений поля Холла для образца Mg-6 при $T = 4{,}22°$ K

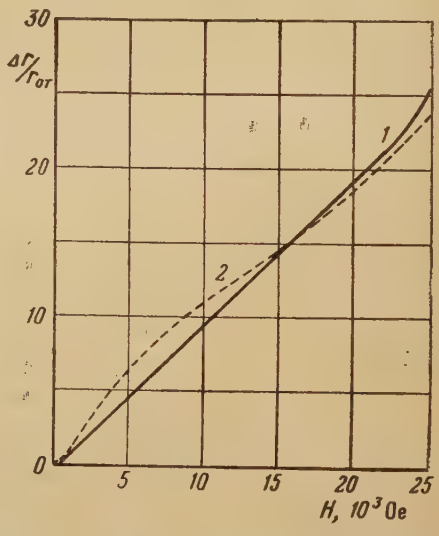


Рис. 10. Сравнение экспериментальных (*1*) и расчетных (*2*) значений изменения сопротивления в магнитном поле образца Mg-6 при $T = 4{,}22°$K

Для Bi, Be, Ga, Sb получаются существенно меньшие концентрации, однако их также можно считать отвечающими действительности вследствие сильного влияния примесей на электропроводность этих металлов. Средние величины подвижностей, если их сравнить при температурах, равных температуре Дебая, оказываются одинаковыми для металлов с одинаковой концентрацией подвижных частиц. Подвижности увеличиваются с уменьшением концентрации приблизительно как $n^{-1/3}$.

В общем можно констатировать, что теория достаточно хорошо согласуется с опытными данными. Однако следует напомнить, что для металлов с равной концентрацией дырок и электронов согласие имеется только в области больших полей, и теория не может правильно описать всю кривую изменения сопротивления в магнитном поле, а для эффекта Холла получается лишь качественное согласие с теорией.

Перейдем к обсуждению этих затруднений.

Вид кривых E_y/E_x и $\Delta r/r_{0T}$ для магния [15] в наибольших полях, примененных в исследованиях, показывает, что магний относится к металлам с равным числом дырок и электронов. Это соответствует и положению магния в периодической системе элементов.

Однако характер кривых в средних полях не отвечает свойствам описанной выше простой модели с двумя группами подвижных зарядов. Действительно, как следует из формулы (5), при данной температуре E_y/E_x у металлов этого типа не может изменять знак при увеличении поля. У магния знак E_y/E_x изменяется (рис. 9). Линейный участок на кривой $\frac{\Delta r}{r_{0T}} = f(H)$ у магния доходит до $\frac{\Delta r}{r_{0T}} \approx 20$ (рис. 10). Как указывалось, эта особенность кривой изменения сопротивления не описывается в рамках данной модели, предусматривающей квадратичный рост сопротивления во всех полях.

Таблица 3

Значения подвижностей и концентрации подвижных частиц образца Mg-6 при $T = 4{,}22°$ К

№ группы зарядов	τ_i/m_i	n_i/n_A
1	$4{,}4\cdot10^{16}$	0,09
2	$5{,}2\cdot10^{16}$	0,09
3	$2{,}5\cdot10^{15}$	0,15
4	$2{,}3\cdot10^{15}$	0,15

Выход из этого затруднения может быть найден при некотором усложнении модели. Положим, что в изотропном металле существуют две группы «дырок», концентрации которых n_1 и n_3, эффективные массы m_1 и m_3, среднее время между столкновениями с решеткой τ_1 и τ_3, и две группы электронов с концентрациями n_2 и n_4 и соответствующими параметрами m_2, m_4 и τ_2, τ_4. Положим $n_1 = n_2$ и $n_3 = n_4$, т. е. рассмотрим металл с двумя группами дырок и электронов, в каждой из которых концентрация дырок равна концентрации электронов. Для такой модели формулы (1)—(7) соответственно усложняются и появляется возможность интерпретировать экспериментальные кривые во всей экспериментально исследованной области, получить изменение знака эффекта Холла и участок с замедленным возрастанием сопротивления.

Формулы для электропроводности и поля Холла для этой модели имеют вид:

$$\sigma_{0T} = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{n_i e^2 \tau_i}{m_i} = \sum_{i=1}^{i=4} \sigma_{0i}, \tag{8}$$

$$\sigma_H = \left[1 + \left(\frac{E_y}{E_x}\right)^2\right] \sum_{i=1}^{4} \frac{\sigma_{0i}}{1+\varphi_i^2}, \tag{9}$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{n_1}{n_3}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)(1+\varphi_3^2)(1+\varphi_4^2) + (\varphi_3^2 - \varphi_4^2)(1+\varphi_1^2)(1+\varphi_2^2)}{\frac{n_1}{n_3}(\varphi_1+\varphi_2)(1+\varphi_1\varphi_2)(1+\varphi_3^2)(1+\varphi_4^2) + (\varphi_3+\varphi_4)(1+\varphi_3\varphi_4)(1+\varphi_1^2)(1+\varphi_2^2)}, \tag{10}$$

где

$$\varphi_1 = \frac{eH\tau_1}{m_1 c}, \quad \varphi_2 = \frac{eH\tau_2}{m_2 c}, \quad \varphi_3 = \frac{eH\tau_3}{m_3 c}, \quad \varphi_4 = \frac{eH\tau_4}{m_4 c}.$$

Из сопоставления формул (8)—(10) с данными для образца Mg-6 при $T = 4{,}22°$ К [15] получаются значения подвижностей и концентраций подвижных зарядов, приведенные в табл. 3.

При $T = 4{,}22°$К $\frac{r_{00}}{r_{0T}} = 2{,}24\cdot10^{-3}$.

Таким образом, для магния получаются две группы дырок и электро-

нов — 1, 2 и 3, 4, резко отличающиеся по подвижности, но с почти одинаковой подвижностью дырок и электронов внутри каждой группы. Совокупность свойств таких групп зарядов хорошо описывает как кривую изменения сопротивления магния в магнитном поле, так и изменение E_y/E_x. Сравнение вычисленных по этим параметрам кривых увеличения сопротивления и поля Холла с экспериментальными дано на рис. 9 и 10. Видно, что расчетные кривые в общем удовлетворительно отражают экспериментальные данные. Следует указать, что если в рамках этой модели отказаться от требования попарного равенства $n_1 = n_2$ и $n_3 = n_4$, а сохранить лишь необходимое равенство общего числа дырок и электронов $n_1 + n_3 = n_2 + n_4$, то появится еще один свободный параметр, позволяющий еще лучше согласовать теоретические результаты с экспериментальными данными. Любопытно, однако, что, и не используя эту добавочную возможность, мы получаем достаточно хорошее согласие с экспериментальными данными. Свойства такой модели достаточно хорошо отражают особенности свойств группы металлов с неограниченным ростом сопротивления в магнитном поле. Из анализа формул (9) и (10) видно, что в малых полях получается: 1) квадратичная зависимость увеличения сопротивления от поля с коэффициентом, определяющимся группой с наибольшей подвижностью; 2) линейная зависимость поля Холла от величины магнитного поля и 3) постоянство константы Холла. В больших полях, когда параметр $\varphi_i > 1$ даже для группы с наименьшей подвижностью, зависимость сопротивления от поля также квадратичная, но с меньшим коэффициентом, определяющимся приблизительно средним геометрическим из всех подвижностей. Поле Холла в больших полях убывает по закону $\sim 1/H_4$, а константа Холла приблизительно постоянна. В средних полях наблюдаются замедленный рост сопротивления и резкая зависимость константы Холла от поля, в частности она может изменять знак. Описанные свойства такой модели отвечают экспериментально наблюденным свойствам металлов с неограниченным ростом сопротивления в магнитном поле.

Предположение о существовании двух групп электронов и дырок с существенно различными подвижностями не противоречит представлениям о структуре энергетических зон металлов с гексагональной симметрией. Подвижности электронов во второй зоне, вблизи оснований и боковых сторон многогранника первой зоны, так же как подвижности дырок вблизи ребер основания и боковых ребер многогранника первой зоны, могут существенно отличаться.

Полученный для магния результат имеет, повидимому, общее значение. Две группы электронов и дырок с меньшей, чем у магния, разницей в подвижностях существуют, видимо, и у цинка, и у кадмия, и этим объясняется наличие у них резко выраженного линейного участка на кривой зависимости сопротивления от поля. Более того, даже у кубических кристаллов, где все шесть групп электронов во второй зоне обладают одинаковыми свойствами, мы получим разную подвижность их, если учтем анизотропию эффективных масс и разницу в ориентации тензора эффективных масс по отношению к полю для групп электронов вблизи разных плоскостей на границе с первой зоной.

При сравнении теории с результатами исследования анизотропии эффекта Холла и изменения сопротивления у олова и цинка оказывается, что и здесь для объяснения экспериментальных данных совершенно недостаточно рассмотрения анизотропной модели с двумя группами подвижных частиц — дырок и электронов, обладающими анизотропной эффективной массой. Для олова можно получить отвечающие опыту кривые изменения сопротивления и эффекта Холла для двух главных направлений в рамках модели с четырьмя группами подвижных частиц — двумя группами электронов и двумя группами дырок с анизотропными эффектами массами [18]. Таким образом, эта модель может объяснить появление в некоторых случаях очень большой анизотропии сопротивления в магнитном поле и обыч-

ную величину анизотропии, если имеется простая диаграмма вращения с максимумами и минимумами для главных кристаллографических направлений. Однако такая модель не может объяснить возникновения в больших полях на диаграмме вращения для сопротивления в магнитном поле, кроме основных, ряда добавочных минимумов. Экспериментальные данные показывают, что эти минимумы возникают при таком положении кристалла, когда одна из кристаллических поверхностей, наиболее густо усеянных атомами, становится перпендикулярной к полю. В работе [18] показано, что это явление может быть качественно объяснено в рамках зонной теории.

3. Сравнение экспериментальных данных с результатами других методов исследования свойств электронов проводимости

а) Сравнение с результатами определения длины свободного пробега

В настоящее время длина свободного пробега определяется тремя методами. Раньше всех был применен метод, основанный на определении влияния размеров образцов на их электропроводность [35]; затем метод аномального скин-эффекта [36] и, наконец, метод, основанный на влиянии формы и размеров образцов на их сопротивление в магнитном поле. Последний метод был разработан автором совместно с Б. Г. Лазаревым [37].

В предположении квадратичной связи между квази-импульсом и энергией подвижных частиц можно из данных о подвижности, полученных из гальваномагнитных явлений, вычислить также длину свободного пробега для каждой группы подвижных частиц и затем, усреднив эти данные, сравнить полученное среднее значение с результатами, полученными из других методов. Сравнение данных, полученных описанными выше методами, с результатами, полученными из гальваномагнитных явлений, показывает хорошее согласие. Так, например, длина свободного пробега при 0° С, определенная из аномального скин-эффекта, получается: у меди — $\lambda_0 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ см, у алюминия — $\lambda_0 = 1{,}95 \cdot 10^{-6}$ см, у свинца — $\lambda_0 = 0{,}55 \cdot 10^{-6}$ см; соответствующие значения, вычисленные из гальваномагнитных явлений, будут: для меди — $\lambda_0 = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ см, для алюминия $\lambda_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ см, для свинца $\lambda_0 = 0{,}48 \cdot 10^{-6}$ см. Для кадмия по методу определения влияния на электропроводность размеров образцов $\lambda_0 = 2{,}9 \cdot 10^{-6}$ см, из аномального скин-эффекта $\lambda_0 = 2{,}25 \cdot 10^{-6}$ см и из гальваномагнитных явлений $\lambda_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ см, и т. д. [15].

б) Сравнение с данными по измерению электронной теплоемкости

Экспериментальные данные о величине электронной теплоемкости до сих пор сравнивались только с теорией свободных электронов. Концентрацию электронов обычно вычисляли по валентности металла и атомному объему. Из сравнения вычисленных и экспериментальных данных определяли величину эффективной массы. Ясно, что такой способ сравнения теории с экспериментом не является удовлетворительным; но до последнего времени он был единственно возможным.

Полученные нами данные о концентрации подвижных зарядов позволяют сделать более удовлетворительное, хотя также достаточно грубое, сравнение расчетных данных с результатами измерения теплоемкости.

Если представить электронную теплоемкость на грамм-атом в виде

$$C_{V_e} = \alpha RT, \tag{11}$$

то по теории свободных электронов величина α представляется следующим выражением:

$$\alpha = \frac{n}{n_A} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{k}{\varepsilon_0^1} = \frac{n}{n_A} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{8km_0}{h^2 \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}}, \tag{12}$$

где n — число электронов, а n_A — число атомов в единице объема. Если

у нас имеется несколько групп подвижных зарядов, то электронная теплоемкость будет, очевидно, суммой теплоемкостей отдельных групп подвижных зарядов:

$$C_{V_e} = \alpha RT = RT\Sigma\alpha_i.$$

Мы будем вычислять α_i как для дырок, так и для электронов по формуле (12), пользуясь данными о их концентрации, приведенными в табл. 1, 2 и 3. Затем из сравнения с экспериментальными данными для α вычислим m^*/m_0 (отношение эффективной массы к массе свободного электрона). Разумеется, полученные значения m^*/m_0 — это лишь некоторые средние величины, не отражающие разницы в эффективных массах отдельных групп.

Результаты таких вычислений приведены в табл. 4.

Таблица 4

Металл	n_1/n_A	n_2/n_A	$\alpha\ (=\Sigma\alpha_i)\cdot 10^4$	$\alpha_{\text{эксп}}\cdot 10^4$	m^*/m_0	Литературная ссылка
Cu	0,32	0,81	0,97	0,90	0,93	[38]
Be	0,028	0,0028	0,38	0,27	0,71	[39]
Mg	0,09	0,15	1,16	1,64	1,41	[38]
Zn	0,17	0,17	0,78	$0,68_5$	0,88	[40]
Cd	0,18	0,18	1,05	0,85	0,81	[41]
Al	0,85	0,28	1,21	1,30	1,08	[40]
In	0,25	1,1	1,72	1,76	1,02	[42]
Sn	0,34	0,34	1,47	2,0	1,36	[43]
Pb	0,50	0,50	1,78	3,77	2,1	[44]
Bi	$4{,}2\cdot 10^{-5}$	$4{,}2\cdot 10^{-5}$	0,178	0,094	0,53	[45]

Здесь n_1/n_A — относительные концентрации дырок и n_2/n_A — электронов (у Mg — $\frac{n_1}{n_A}$ и $\frac{n_3}{n_A}$ — см. табл. 3); значения $\alpha = \Sigma\alpha_i$ вычислены по формуле (12) и данным для n_1/n_A и n_2/n_A; экспериментальные значения $\alpha_{\text{эксп}}$ взяты из работ, ссылки на которые приведены в последней графе таблицы. Значения $\frac{m^*}{m_0} = \frac{\alpha_{\text{эксп}}}{\alpha}$.

Величины m^*/m_0, за немногими исключениями, очень близки к единице. Хотя это лишь средние величины, но все же отсюда можно сделать вывод, что нет значений эффективных масс, существенно — в десятки раз — превышающих единицу и, по крайней мере, у одной из групп подвижных частиц значение эффективной массы близко к единице (за единицу эффективной массы принимаем массу свободного электрона).

Этот вывод относится и к бериллию, у которого электронная концентрация, по нашему определению, составляет примерно 10^{-2} электронов на атом; у висмута среднее значение эффективной массы близко к 0,5. Это не противоречит предположению о малости эффективных масс электронов [33] при условии, что эффективная масса дырок близка к единице.

Выводы

Можно считать, что показано, что комплексные исследования гальваномагнитных явлений на достаточно чистых металлах при низких температурах дают весьма подробные сведения о свойствах электронов проводимости в металлах. Исследованные металлы по характеру гальваномагнитных явлений можно разделить на два класса. В первом относительная величина поля Холла — E_y/E_x — в больших магнитных полях уменьшается с ростом магнитного поля, а сопротивление безгранично возрастает. У второго класса поле Холла в больших магнитных полях неограниченно растет, а сопротивление стремится к некоторому предельному значению. Для объяснения полученных экспериментальных данных необхо-

имо предположить, что у всех исследованных металлов (кроме щелочных) меется перекрытие зон, и проводимость осуществляется квази-частицами двумя знаками заряда — дырками и электронами. У металлов первого класса число дырок равно числу электронов, а у металлов второго класса оно не одинаково. Для более детального объяснения полученных данных необходимо привлечение модели с несколькими группами дырок и электронов.

Для полного использования полученных экспериментальных данных необходимо дальнейшее уточнение теории металлического состояния. Уже при настоящем состоянии теории возможно использование результатов исследования гальваномагнитных явлений для оценки порядка величин подвижности и концентраций подвижных частиц в металлах.

Цитированная литература

1. Капица П. Л., Proc. Roy. Soc., **A123**, 292 (1929).
2. De Haas W. I., Schubnikov L. W., Leid. Comm., No. 207, No. 210 (1930).
3. Лазарев Б. Г., Нахимович Н. М., Парфенова Е. А., ЖЭТФ, **9**, 1169 (1939).
4. Justi E., Phys. ZS., **41**, 563 (1940).
5. Kohler M., Ann. d. Phys., **32**, 211 (1938).
6. Боровик Е. С., ДАН СССР, **69**, 767 (1949).
7. Justi E., Leitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe, Göttingen, 1948.
8. Блохинцев Д., Нордгейм Л., ZS. f. Phys., **84**, 168 (1933).
9. Sondheimer E. H., Wilson A. H., Proc. Roy Soc., **190**, 435 (1947).
10. Kamerlingh Onnes H., Hof K. Leid. Comm., No. 1426 (1914).
11. Geritzen A. N., Haas W. I., Physica, **7**, 802 (1940).
12. Justi E., Ann. d. Phys., **3**, 183 (1948).
13. Kinchin G. H., Proc. Roy. Soc., **A217**, 9 (1953).
14. Боровик Е. С., ДАН СССР, **70**, 601 (1950); **75**, 639 (1950).
15. Боровик Е. С., ЖЭТФ, **23**, 83, 91 (1952); **27**, 355 (1954).
16. Боровик Е. С., ДАН СССР, **95**, 485 (1954).
17. Justi E., Scheffers H., Phys. ZS., **37**, 475 (1936).
18. Боровик Е. С., ЖЭТФ (в печати).
19. Haas W. I., Blom J. W., Physica, **1**, 134 (1934).
20. Justi E., Scheffers H., Phys. ZS., **37**, 700 (1936); **38**, 981 (1937).
21. Milner C., Proc. Roy Soc., **160**, 207 (1937).
22. Grüneisen E., Adenstat H., Ann. d. Phys., **32**, 211 (1938).
23. Justi E., Ann. d. Phys., **41**, 486 (1940).
24. Forroud A., Justi E., Phys. ZS., **40**, 501 (1939).
25. Forroud A., Justi E., Kramer J., Phys. ZS., **41**, 113 (1940).
26. Justi E., Kramer J., Schulze R., Phys. ZS., **41**, 308 (1940).
27. Marcus J. A., Phys. Rev., **76**, 412 (1949).
28. Веркин Б. И., ДАН СССР, **81**, 529 (1951).
29. Конторова Т. А., Френкель Я. И., ЖЭТФ, 5, 405 (1935).
30. Jones H., Proc. Roy. Soc., **A155**, 653 (1936).
31. Köhler M., Ann. d. Phys., **22**, 129 (1938).
32. Давыдов Б. И., Померанчук А. Я., ЖЭТФ, 9, 1295 (1939).
33. Köhler M., Ann. d. Phys., **6**, 186 (1949).
34. Sondheimer E. H., Proc. Roy. Soc., **A193**, 484 (1948).
35. Eucken A., Forster F., Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, **1**, 43 (1934).
36. Pipard A. B., Proc. Roy. Soc., **A 191**, 385 (1947).
37. Боровик Е. С., Лазарев Б. Г., ДАН СССР, **62**, 611 (1948).
38. Esterman J., Fridberg S. A., Goldman J. E., Phys. Rev., **87**, 582 (1952).
39. Hill R. W., Smith P. L., Phil. Mag., **44**, 636 (1953).
40. Danut J. G., Neer C. V., Phys. Rev., **76**, 1113 (1949).
41. Самойлов Б. Н., ДАН СССР, **86**, 281 (1952).
42. Miesner A. D., Wills H. H., Proc. Roy. Soc., **A 174**, 262 (1940).
43. Keesom W. H., Van Laer P. H., Physica, **5**, 193 (1938).
44. Horovitz M., Silvidi A. A., Phys. Rev., **88**, 1182 (1952).
45. Keesom W. H., Realman N., Phys. Rev., **96**, 897 (1954).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

А. П. КОМАР, Н. М. РЕЙНОВ и С. С. ШАЛЫТ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОТОМАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ЗАКИСИ МЕДИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Настоящая работа является продолжением исследования фотомагнитоэлектрического эффекта в закиси меди, но при более низких температурах и бо́льших магнитных полях, чем это сделано в работе авторов, открывших этот эффект [1].

Фотомагнитоэлектрический эффект Кикоина—Носкова состоит в следующем: если пластинку полупроводника, освещенную перпендикулярно к ее поверхности, поместить в магнитное поле, то вследствие внутреннего фотоэффекта в направлении, перпендикулярном магнитному полю, появится разность потенциалов. Указанные авторы освещали образцы Cu_2O белым светом при $T = 77°K$ и в отдельных случаях получали разности потенциалов до 20 V при напряженности электрического поля порядка 5 V $см^{-1}$. Было установлено, что фотомагнитоэлектрическая разность потенциалов быстро уменьшается с повышением температуры и при комнатных температурах снижается до пределов чувствительности измерительных приборов.

Дальнейшие исследования И. К. Кикоина, а также других авторов [1, 2], показали, что зависимость фотомагнитоэлектрической разности потенциалов от напряженности магнитного поля при температуре жидкого азота линейна вплоть до полей порядка $4 \cdot 10^3$ Ое. Теория фотоэлектромагнитного эффекта была дана Я. И. Френкелем [3]. Эффект элементарно интерпретируется следующим образом: свет, падая на образец, освобождает в соседней с поверхностью области пару: электрон — дырка; затем электрон и дырка диффундируют внутрь образца. Приложенное магнитное поле изменяет направление их движения, отчего и возникает фотомагнитоэлектрический эффект.

Теория показывает, что зависимость фотомагнитоэлектрического эффекта от напряженности магнитного поля должна быть линейной в том случае, когда величина $\mu H/c$ много меньше единицы:

$$\frac{\mu H}{c} \ll 1,$$

где μ — подвижность носителей тока, c — скорость света.

Из теории следует, что с точностью до первого нелинейного члена разложения указанная выше зависимость фотомагнитоэлектрической эдс от магнитного поля имеет вид:

$$V = \frac{aH}{1 + (\mu H / c)^2}.$$

Исследования на закиси меди в условиях, когда параметр $\mu H/c$ сравним с единицей, до настоящего времени не проводились. Оценить подвижность носителей заряда в этих условиях можно по зависимости фотоэлектромагнитной эдс от напряженности магнитного поля.

По данным Энгельгарда [4] значения подвижности μ в Cu_2O, рассчитанные по проводимости и эффекту Холла, составляют:

при $T = 200°K$

$$\mu = 4 \cdot 10^4 \text{ CGS};$$

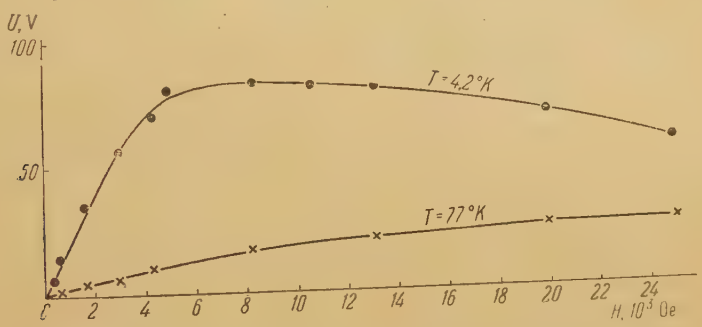
при $T = 80°K$

$$\mu = 4 \cdot 10^5 \text{ CGS}.$$

Из приведенных данных можно сделать заключение, что нелинейная зависимость в области температур жидкого азота должна обнаруживаться при полях $\sim 10^5$ Oe.

Учитывая, что с понижением температуры подвижность увеличивается, следует ожидать, что при температурах жидкого гелия отклонение от линейности должно произойти даже при тех значениях напряженности магнитного поля, которые использовались в работе И. К. Кикоина и М. М. Носкова [1].

Таким образом, кривые зависимости фотомагнитоэлектрического эффекта от магнитного поля вплоть до $H \geqslant c/\mu$, снятые при различных температурах, могут служить для экспериментальной оценки температурной зависимости подвижностей носителей заряда.



Зависимость фотомагнитоэлектрического эффекта у образца закиси меди от напряженности магнитного поля при $T = 77°$ K и 4,2° K

Исследованные нами образцы закиси меди имели вид параллелепипедов $0{,}4 \times 10 \times 40$ мм. Образцы освещались обычной лампой накаливания в 500 W, непосредственно или через синий фильтр. Освещение синим светом почти в два раза повышало эффект.

Исследования проводились при двух значениях температур — $T = 77°$ K и $T = 4{,}2°$ K и при напряженностях магнитного поля до $2{,}5 \cdot 10^4$ Oe. Полученные результаты приводятся на рисунке. Отклонение от линейности на кривой зависимости фотомагнитоэлектрического эффекта от магнитного поля при $T = 77°$ K начинается при полях порядка $8 \cdot 10^3$ Oe, а при $T = 4{,}2°$K — в полях порядка $3 \cdot 10^3$ Oe [5].

Эти данные позволяют оценить порядок подвижности носителей заряда для двух указанных температур, а именно:

$$\mu_{77°K} \approx 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ CGS} \quad \text{и} \quad \mu_{4{,}2°K} \approx 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ CGS},$$

а также сопоставить эти результаты с результатами Энгельгарда [4].

Учитывая трудности получения образцов закиси меди с надежными одинаковыми значениями подвижности (обычно для различных образцов Cu_2O подвижности отличаются в несколько раз), совпадение в оценке значений подвижности, определенное нашим методом и методом Энгельгарда для температуры жидкого азота, следует считать удовлетворительным.

Интересно отметить, что фотомагнитоэлектрический эффект в наших образцах достигал 90 V.

Полученные нами экспериментальные результаты были затем теоретически обоснованы в работе А. И. Ансельма [6].

Физико-технический институт
Академии наук СССР

Цитированная литература

1. Кикоин И. К., Носков М. М., Sow. Phys., **5**, 586 (1934).
2. Лифшиц Е., Sow. Phys., **9**, 641 (1936); Лашкарев В. Е., ЖЭТФ, **18**, 917 (1948); **18**, 953 (1948); Толпыго К. Б., Труды Института физики АН УССР, **3**, 52 (1952); Agrain P., Bulliard H., C. R., **236**, *6*, 595 (1953); Moss T. S., Pincherle L., Woodward A. M., Proc. Phys. Soc., B **66**, 743 (1953); Bulliard H., Ann. de phys., **9**, 52 (1954).
3. Френкель Я. И., Sow. Phys., **5**, 597 (1934).
4. Engelhard E., Ann. d. Phys., **17**, 501 (1933).
5. Комар А. П., Рейнов Н. М., Шалыт С. С., ДАН СССР, **96**, *1*, 47 (1954).
6. Ансельм А. И., ЖТФ, **24**, 2064 (1954).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

С. В. ВОНСОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КРИСТАЛЛОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1

В области низких температур, когда величина $\varkappa T$ — средней тепловой энергии, приходящейся на атом,— становится малой по сравнению с энергией взаимодействия атомных частиц в теле, последнее переходит в конденсированное состояние — жидкое (аморфное) или твердое (кристаллическое). Основную роль при этом играет электрическое взаимодействие между атомными ядрами и электронами. Слабое магнитное взаимодействие в подавляющем большинстве случаев можно рассматривать как малое возмущение. Математически задача сводится к решению волнового уравнения, которое в координатном представлении имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n; \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_N)}{\partial t} = \hat{H} \cdot \Psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n; \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_N), \quad (1.1)$$

где Ψ — волновая функция координат n электронов $\mathbf{r}_j$ и N ядер $\mathbf{R}_i$, $h = 2\pi\hbar$ — квант действия и $\hat{H}$ — оператор Гамильтона системы, равный

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{\mathbf{R}_i} - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{n}\Delta_{\mathbf{r}_j} + \hat{V}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n; \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_N); \quad (1.2)$$

здесь M и m — соответственно массы ядра и электрона, $\Delta_{\mathbf{R}_i}$ и $\Delta_{\mathbf{r}_j}$ — операторы Лапласа и $\hat{V}$ — оператор потенциальной энергии электрического взаимодействия между частицами. В случае стационарных состояний (1.1) принимает более простой вид:

$$\hat{H} \cdot \Psi = E\Psi, \quad (1.3)$$

где E — энергия всей системы. Точное или даже приближенное решение (1.3) в о б щ е м случае практически невозможно в силу понятных математических трудностей. Главной причиной их является «перепутывание» координат микрочастиц в потенциале $\hat{V}$. Физически эта трудность обусловлена сложностью связей между частицами в системе. Не делая никаких упрощающих предположений о виде функции $\hat{V}$, не удается получить каких-либо сведений об общих свойствах решений (1.3) или (1.1). Поэтому приходится обращаться к тем или иным приближенным методам расчета. Так, например, опираясь на линейчатый характер рентгеновских спектров конденсированных систем в той области частот света, которая соответствует переходам электронов между наиболее глубокими уровнями атома, обычно используют приближение, согласно которому конденсированная фаза рассматривается как две «автономные» подсистемы — совокупность заряженных ионов и коллективизированные электроны (бывшие валентные электроны атомов газа). Основное различие этих подсистем заключается в различии масс иона и электрона. Используя отношение массы электрона к массе иона как малый безразмерный параметр, можно произвести в (1.3) разложение по степеням этого параметра и развить прибли-

женную теорию, которая называется адиабатическим приближением. При этом предполагается, что в каждый данный момент подвижная электронная система описывается такой волновой функцией, которая отвечает неподвижному распределению инертных ионов. Адиабатическое приближение можно применять для трактовки лишь таких явлений в конденсированных телах, в которых система ионов не принимает активного, «динамического» участия. Ионы рассматриваются либо совершенно неподвижными, либо совершающими малые колебания около положений равновесия. Эти колебания рассматриваются обычно как малое возмущение, способное вызвать лишь квантовые переходы электронной системы между ее стационарными состояниями, отвечающими неподвижной конфигурации ионной системы. Адиабатическое приближение исключает возможность последовательной квантовомеханической трактовки таких явлений, как диффузия, пластическая деформация, которые, в свою очередь, определяют всю совокупность структурных фазовых превращений в конденсированных телах. Даже при анализе чисто электронных явлений необходимо учитывать активную роль ионного движения. Примером этого может служить явление изотопического эффекта в сверхпроводниках.

Оставляя пока открытым вопрос о преодолении трудностей, связанных с адиабатическим приближением, выясним те возможности, которые дает нам теория в рамках этого приближения. В данном случае вместо уравнения (1.3) необходимо решать более простое уравнение:

$$\hat{H}_{эл}\Psi_{эл} = E_{эл}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_N)\,\Psi_{эл}, \qquad (1.4)$$

в котором волновая функция зависит от координат только электронов а координаты ионов входят как параметры как в волновую функцию, так и в энергию электронной системы. В оператор энергии (1.4) не входят операторы кинетической энергии ионов и потенциальной энергии взаимодействия между ними. Решение (1.4) в обычном координатном представлении встречает большие математические трудности*. Поэтому пытаются решать уравнение (1.4) в других представлениях. Основная трудность решения (1.4) заключается, как уже упоминалось, в «перепутывании» координат электронов. Если отбросить энергию взаимодействия, то переменные в (1.4) разделяются, и задача сводится к решению однотипных одноэлектронных уравнений. Тогда энергия системы аддитивно складывается из энергий отдельных электронов, а волновая функция имеет вид антисимметризованной суммы произведений одноэлектронных функций. Такое одноэлектронное приближение лишает нас возможности последовательно учесть свойства системы, обусловленные самим существованием электронного взаимодействия.

Ограниченные возможности одноэлектронного (зонного) приближения настоятельно требуют разработки многоэлектронной теории твердого тела. При многоэлектронной трактовке волновую функцию системы обычно ищут в виде ряда по антисимметризованным произведениям одноэлектронных функций:

$$\Psi_{эл}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n), \qquad (1.5)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — квантовые числа, определяющие одноэлектронные состояния, которые выбираются в качестве обобщенных координат исследуемой системы. Если ортонормированные функции $\psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ образуют полную систему, то разложение (1.5) является точным, и коэффициенты

* Единственным исключением являются так называемые одномерные задачи (линейные атомные цепочки), которые, однако, часто не представляют физического интереса, а иногда могут приводить к ложным результатам при попытке обобщить полученные при помощи их решения на случай реальных трехмерных тел.

$a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ являются точной волновой функцией системы в новом представлении. Используя стандартные методы теории унитарных преобразований, можно (1.4) перевести на язык нового представления. Оператор энергии в обычном представлении имеет вид:

$$\hat{H}_{\text{эл}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{n}\Delta_{\mathbf{r}_j} + \sum_{i,\,j} G(|\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_i|) + \frac{1}{2}\sum_{j \neq j'} V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|), \qquad (1.6)$$

т. е. состоит из аддитивной части (кинетической энергии и потенциальной энергии электронов $\mathbf{r}_j$ в поле ионов $\mathbf{R}_i$, т. е. $G(|\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_i|)$) и бинарной части (энергии взаимодействия между электронами $-V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|)$). Если в новом представлении за координаты выбрать числа заполнений n_α одноэлектронных состояний, то оператор (1.6) примет вид:

$$\hat{H}^{(\alpha)}_{\text{эл}} = \sum_{\alpha,\,\alpha'} L(\alpha, \alpha')\,\hat{a}_\alpha + \hat{a}_{\alpha'} + \sum_{\alpha_1\alpha_2;\ \alpha_1'\alpha_2'} F(\alpha_1\alpha_2;\ \alpha_1'\alpha_2')\,\hat{a}^+_{\alpha_1}\hat{a}^+_{\alpha_2}\hat{a}_{\alpha_1'}\hat{a}_{\alpha_2'}, \qquad (1.7)$$

где L и F — соответственно матричные элементы отдельных слагаемых аддитивной и бинарной частей (1.6), вычисленные при помощи одноэлектронных функций; $\hat{a}^+_\alpha$ и $\hat{a}_\alpha$ — операторные ферми-амплитуды вторичного квантования, действующие на волновые функции от чисел заполнения. Произведение этих операторов дает оператор числа заполнения состояний $\hat{n}_\alpha$, диагональный в данном представлении:

$$\hat{a}^+_\alpha\,\hat{a}_\alpha = \hat{n}_\alpha; \qquad (1.8)$$

его собственные значения равны $0, 1, 2, 3, \ldots$ Ферми-операторы подчиняются перестановочным соотношениям:

$$\hat{a}^+_\alpha\,\hat{a}_{\alpha'} + a_{\alpha'}\hat{a}^+_\alpha = \delta_{\alpha\alpha'}. \qquad (1.9)$$

Главная задача теории заключается в нахождении собственных значений оператора энергии (1.7). Решить такую задачу в общем случае также практически невозможно и в представлении вторичного квантования. Но здесь легче найти пути приближенного решения задачи. Можно сразу определить собственные значения оператора (1.7) в том случае, если он имеет вид аддитивной суммы операторов чисел заполнений. Тогда энергия системы будет иметь вид аддитивной суммы энергий эффективных осцилляторов «поля», представляющих исходную систему взаимодействующих частиц. В теории твердого тела подобное решение было впервые получено при исследовании теплового движения кристаллов, которое можно представить как газ элементарных возбуждений — фононов. Еще раньше этот метод был использован в теории электромагнитного поля, где такого рода квантовыми осцилляторами являются фотоны. В связи с этими результатами необходимо иметь в виду, что хотя энергия исходной системы микрочастиц и характеризуется суммой энергий отдельных элементарных осцилляторов, однако каждый такой осциллятор отнюдь нельзя отождествлять с движением отдельной исходной частицы, ибо такой осциллятор представляет коллективное движение всей системы в целом.

Даже если отбросить в (1.7) члены, описывающие взаимодействие между электронами, то и тогда после диагонализации мы будем иметь дело, строго говоря, не с движением «свободных» частиц исходной системы, а с движением системы — частица + внешнее поле. Например, энергия электрона в кристаллической решетке — это энергия уже не одного электрона, а электрона и решетки (только в пределе исчезающе слабого взаимодействия электрона с решеткой эту энергию можно отождествить с энергией действительно свободного электрона).

Из приведенных известных примеров видно, что, изучая движение сложной системы взаимодействующих микрочастиц, мы имеем дело с коллективными степенями свободы, в которых движение системы как целого

проявляется наиболее ярко, а индивидуальные черты исходных частиц отступают на задний план. Вследствие взаимодействия между частицами исходной системы в ней устанавливается определенная корреляция в движении частиц по всей системе, упорядоченные колебания плотности частиц (или их заряда, их спина и т. п.). Эти коллективные степени свободы не исчерпывают всех типов движения системы взаимодействующих частиц. Имеются еще степени свободы, напоминающие по своему характеру индивидуальное движение исходных частиц системы. Здесь не выступает на первый план корреляция по системе, и мы имеем дело с подобием хаотического теплового движения молекул в газе. В действительности, и в этом случае речь идет о движении единого взаимодействующего коллектива исходных частиц, и лишь с некоторым приближением можно произвести указанное выше разделение степеней свободы системы на коллективные и индивидуальные.

В связи со сказанным возникает важный вопрос: в каких случаях и как можно произвести подобную классификацию «обертонов» сложного движения микросистемы? Практика теоретических расчетов показывает, что это можно сделать в том случае, когда система колеблется около какого-то основного состояния равновесия относительно данного типа колебаний. Так, например, это условие выполнено для теплового движения решетки в области низких температур. В случае ферромагнетиков можно, как известно, рассматривать малые отклонения от основного состояния, обладающего спиновым насыщением. Элементарные возбуждения электронной системы в данном случае носят характер спиновых волн или ферромагнонов. В полупроводниках отклонение от нормального состояния системы внешних электронов носит характер элементарных возбуждений — различных экситонов (бестоковых или токовых) и т. п.

Таким образом, при трактовке атомных систем многих взаимодействующих частиц можно выделить коллективные степени свободы, которые при условии слабости возбуждения системы около соответствующих «однородных» основных состояний оказывается возможным представить в виде «идеальных» газов квази-частиц.

Выделяя в гамильтониане системы (1.7) члены, квадратичные относительно операторов вторичного квантования, нельзя полностью уничтожить члены более высокого порядка в этих операторах (кубические, четвертой степени и т. д.). Можно лишь сказать, что при условии слабого возбуждения системы (относительно основного однородного состояния) эти члены высшего порядка малы. В первом приближении они описывают процессы столкновения между квази-частицами, т. е. квантовые переходы системы между ее стационарными слабовозбужденными состояниями. Поэтому открывается возможность не только для определения энергетического спектра системы (т. е. дисперсионного соотношения между энергией (или частотой) и квази-импульсом (или волновым числом) квази-частиц) и вычисления равновесных термодинамических величин системы, но и для последовательного решения огромной совокупности кинетических задач для конденсированных фаз, находящихся вблизи основного состояния, т. е. в области достаточно низких температур.

2

В связи с методом квази-частиц, особенно при его применении к трактовке кинетических проблем, естественно, возникает вопрос о типе статистики, которой должны подчиняться квази-частицы. Без решения этого вопроса невозможно правильно записать кинетическое уравнение той или иной задачи. Здесь возможны два случая: фермиевской и бозевской статистики. Ввиду разнообразия коллективных и индивидуальных степеней свободы сложных систем взаимодействующих электронов и ионов можно ожидать, что движение этих систем должно представляться комбинацией бозе- и ферми-газов элементарных возбуждений.

Иногда используются некоторые «наглядные» способы определения типа статистики квази-частиц. Например, в случае газа фононов известно, что в решетке может быть одновременно возбуждено любое число фононов (с одним и тем же значением квази-импульса), откуда следует, что фононы подчиняются статистике Бозе. Кроме того, для частиц, подчиняющихся этой статистике (бозонов), проекция спинового момента должна быть целочисленной. В случае фононов она равна нулю. Для ферромагнонов спиновая проекция равна единице, ибо при каждом рождении ферромагнона в системе появляется один электрон с перевернутым спином, следовательно, изменение проекции спина системы равно единице. Точно так же можно показать, что экситоны различного типа в полупроводниках, как правило, образуют газы бозонов.

Более сложен вопрос о появлении возбуждений, подчиняющихся статистике Ферми (фермионы). Существенная особенность этих возбуждений — полуцелое значение спиновой проекции, их попарное возникновение и уничтожение и существование некоторого «граничного значения» квази-импульса. В случае идеального газа невзаимодействующих электронов граничный квази-импульс однозначно определяется плотностью газа, для квази-частиц такой однозначности может и не быть.

Можно однозначно и строго определить тип статистики квази-частиц из рассмотрения перестановочных соотношений операторов вторичного квантования, соответствующих данному типу квази-частиц. Если это соотношение типа (1.9), то квази-частицы — фермионы, если же оно имеет вид

$$\hat{b}_f^\dagger \hat{b}_{f'} - \hat{b}_{f'}\hat{b}_f^\dagger = \delta_{ff'}, \qquad (2.1)$$

то имеют дело с газом бозонов.

В связи с рассматриваемым вопросом автоматически возникает также вопрос о связи между статистикой, которой подчиняются частицы исходной микросистемы, и статистикой элементарных возбуждений. Так, например, в жидких He^4 и He^3 элементарные возбуждения соответственно имеют вид бозонов и фермионов [1]. Однако в общем случае исходная система фермиевских частиц, повидимому, может иметь возбуждения обоих типов, а система бозевских частиц — только бозевские возбуждения. Следует отметить, что этот вопрос еще не разрешен до конца [1].

Д. Н. Зубарев [2] недавно предложил общий метод выделения двух ветвей спектра элементарных возбуждений в системах взаимодействующих электронов, разработав новый способ преобразования исходного гамильтониана системы (метод лишних переменных). До этой работы высказывались предположения, что в исходной системе фермионов коллективные степени свободы всегда имеют вид бозонов [3]. Однако Зубареву удалось показать, что это не так и что могут существовать одновременно две различные ветви возбуждений — фермиевская и бозевская.

Необходимо также упомянуть еще одно направление развития теории, которое связано с применением для «коллективного» описания систем взаимодействующих электронов и ионов методов, разработанных в теории заряженной плазмы [4, 5]. Это направление имеет большие перспективы для квантовой теории конденсированных систем.

3

Поскольку на данном Совещании нас интересуют вопросы магнетизма, то в качестве иллюстрации описанного метода остановимся на трактовке ферромагнитных и антиферромагнитных металлов переходных групп. Характерной особенностью этих металлов является активное участие в их физико-химических свойствах не только бывших валентных электронов, но и электронов внутренних незаполненных слоев электронной оболочки изолированных атомов. Уже при помощи элементарного рассмот-

рения [6] удалось показать, что учет обменного электростатического взаимодействия между внешними ($4s$) и внутренними ($3d$) электронами в ферромагнитном переходном металле приводит к изменению энергии s-электронов, которая становится зависящей от направления проекции спина относительно намагниченности внутренних d-электронов. Это приводит к зависимости эффективной массы электрона проводимости от намагниченности ферромагнетика. Последняя же обусловливает все так называемые «аномалии» ферромагнетиков вблизи точки Кюри [6, 7]. Это же s-d-обменное взаимодействие имеет существенное значение для специфических свойств ферромагнетиков и при низких температурах [8].

За последнее время теорию s-d-обменного взаимодействия удалось обобщить, применив метод вторичного квантования [9], а также путем учета магнитного взаимодействия [10—12]. При учете последнего оператор потенциальной энергии взаимодействия двух электронов в (1.6) оказывается зависящим не только от взаимного расстояния электронов, но также и от векторных операторов импульсов $\hat{\mathbf{p}}_j$, $\hat{\mathbf{p}}_{j'}$ и операторов векторов спина $\hat{\mathbf{s}}_j$ и $\hat{\mathbf{s}}_{j'}$:

$$\hat{\Phi}(j, j') \equiv V(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|;\ \hat{\mathbf{p}}_j,\ \hat{\mathbf{p}}_{j'};\ \hat{\mathbf{s}}_j,\ \hat{\mathbf{s}}_{j'}). \tag{3.1}$$

При достаточно низких температурах (магнитное квази-насыщение) полный гамильтониан системы взаимодействующих внешних и внутренних электронов можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{dd} + \hat{H}_{sd}. \tag{3.2}$$

Первое слагаемое — основная часть оператора (3.2) — после приведения ее к диагональному виду представляет в первом приближении энергетический спектр системы в виде суммы энергий квази-частиц двух типов — ферромагнонов (бозевская ветвь) и электронов проводимости (фермиевская ветвь):

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{g}} \varepsilon_{\mathbf{g}} \hat{n}_{\mathbf{g}} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}\sigma} \hat{n}_{\mathbf{k}\sigma} + U_0, \tag{3.3}$$

где U_0 — не зависящая от состояния постоянная,

$$\varepsilon_{\mathbf{g}} = \sqrt{A_{\mathbf{g}}^2 + |B_{\mathbf{g}}|^2} \tag{3.4}$$

— энергия ферромагнона с квази-импульсом $\mathbf{g}$,

$$E_{\mathbf{k}\sigma} = E_{\mathbf{k}}^0 + \frac{1}{2}[D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^+) + D(\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^-)] + \\ + \sigma \sqrt{[D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^+) - D(\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^-)]^2 - 4|D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^-)|^2} \tag{3.5}$$

— энергия электрона проводимости, зависящая не только от его квази-импульса $\mathbf{k}$, но и от проекции спина σ (которая может равняться $\pm 1/2$), $E_{\mathbf{k}}^0$ — энергия электрона проводимости без учета s-d-взаимодействия.

Второе слагаемое в (3.2) описывает процессы рождения и уничтожения ферромагнонов из-за их взаимных столкновений:

$$\hat{H}_{dd} = \sum_{\mathbf{g}, \mathbf{g}'} C_{\mathbf{g}} \hat{b}_{\mathbf{g}'}^+ \hat{b}_{\mathbf{g}'+\mathbf{g}} \hat{b}_{\mathbf{g}}^+ + C_{\mathbf{g}}^+ \hat{b}_{\mathbf{g}'+\mathbf{g}}^+ \hat{b}_{\mathbf{g}'} \hat{b}_{\mathbf{g}}, \tag{3.6}$$

где $\hat{b}_{\mathbf{g}}^+$, $\hat{b}_{\mathbf{g}}$ — бозевские операторы уничтожения и рождения, подчиняющиеся перестановочным соотношениям (2.1); кроме того, они связаны с оператором числа ферромагнонов $\hat{n}_{\mathbf{g}}$ формулой: $\hat{b}_{\mathbf{g}}^+ \hat{b}_{\mathbf{g}} = \hat{n}_{\mathbf{g}}$.

Последнее слагаемое в (3.2) соответствует процессам столкновений

между ферромагнонами и электронами проводимости:

$$\hat{H}_{sd} = \sum_{(\mathbf{k},\,\mathbf{g})} C_+^{(0)}(\mathbf{k},\mathbf{g})\,\hat{b}_{\mathbf{g}}^+\,\hat{a}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}^+\,(-1/2)\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,(1/2) +$$
$$+ \sum_{(\mathbf{k},\,\mathbf{g})} C_+^{(0)}(\mathbf{k},\mathbf{g})\,\hat{b}_{\mathbf{g}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{g}}^+\,(1/2)\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,(-1/2) +$$
$$+ \sum_{(\mathbf{k}\sigma,\,\mathbf{g})} C_+^{(1)}(\mathbf{k}\sigma,\mathbf{g})\,\hat{b}_{\mathbf{g}}^+\,\hat{a}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}^+\,(\sigma)\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,(\sigma) + \sum_{(\mathbf{k}\sigma,\,\mathbf{g})} C_+^{(1)}(\mathbf{k}\sigma,\mathbf{g})\,\hat{b}_{\mathbf{g}}\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{g}}^+\,(\sigma)\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,(\sigma) +$$
$$+ \sum_{(\mathbf{k},\,\mathbf{g})} C_+^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{g})\,\hat{b}_{\mathbf{g}}^+\,\hat{a}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}^+\,(1/2)\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,(-1/2) + \sum_{(\mathbf{k},\,\mathbf{g})} C_+^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{g})\,\hat{b}_{\mathbf{g}}\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{g}}^+\,(-1/2)\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,(1/2). \quad (3.7)$$

Учтенные в (3.7) слагаемые определяют процессы поглощения и испускания ферромагнонов электронами проводимости. Легко видеть, что 1-я, 2-я и 3-я строки в (3.7) соответственно описывают процессы типа

$$\Delta m = 0, \quad \Delta m = \pm 1 \cdot \text{ и } \quad \Delta m = \pm 2,$$

где Δm — изменение полного магнитного квантового числа m системы.

Члены более высокого порядка, содержащие произведения из четырех и более операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$, не включены в операторы (3.6) и (3.7); они соответствуют более сложным и, следовательно, менее вероятным (при условии слабости возбуждения системы) процессам «столкновений».

Конкретный вид коэффициентов $A_{\mathbf{g}}$, $B_{\mathbf{g}}$ и $D(\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}\sigma')$, входящих в (3.4) и (3.5), а также вид амплитуд вероятностей столкновений $C_{\mathbf{g}}$, $C_+^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{g})$ и т. д. в (3.6) и (3.7) определяются видом оператора взаимодействия (3.1).

Рассмотрим случай, когда, наряду с электростатическим взаимодействием электронов, учитывается также их магнитное спин-спиновое взаимодействие, т. е. когда (3.1) имеет вид:

$$\hat{\Phi}(jj') = V(r_{jj'}) + 4\mathfrak{M}^2\,[r_{jj'}^2(\hat{\mathbf{S}}_j\hat{\mathbf{S}}_{j'}) - 3(\mathbf{r}_{jj'}\hat{\mathbf{S}}_j)(\mathbf{r}_{jj'}\hat{\mathbf{S}}_{j'})]\,r_{jj'}^{-5}; \quad (3.8)$$

здесь $\hat{\mathbf{S}}$ — векторный оператор спина (в единицах $\hbar$), $r_{jj'} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}|$, $\mathfrak{M} = \frac{e\hbar}{2mc}$ — магнетон Бора.

В этом случае коэффициенты, входящие в (3.3), (3.4) и (3.5), определяются следующим образом:

$$A_{\mathbf{g}} = I_{\mathbf{n}}(1 - e^{i\mathbf{g}\mathbf{n}}) + 3\sum_{\mathbf{n}}(J_{\mathbf{n}} - E_{\mathbf{n}}) - \sum_{\mathbf{n}}(J_{\mathbf{n}} - E_{\mathbf{n}})(1 - e^{-i\mathbf{g}\mathbf{n}}) + 2\mathfrak{M}H, \quad (3.9)$$

где

$$I_{\mathbf{n}} = \int \varphi^*(\mathbf{r}_1)\,\varphi^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{n})\,V(r_{12})\,\varphi(\mathbf{r}_2)\,\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{n})\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \quad (3.10)$$

$$E_{\mathbf{n}} = \mathfrak{M}^2 \int |\varphi(\mathbf{r}_1)|^2 r_{12}^{-3}\left(1 - 3\frac{z_{12}^2}{r_{12}^2}\right)|\varphi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{n})|^2\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \quad (3.11)$$

$$J_{\mathbf{n}} = \mathfrak{M}^2 \int \varphi^*(\mathbf{r}_1)\,\varphi^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{n})\,r_{12}^{-3}\left(1 - 3\frac{z_{12}^2}{r_{12}^2}\right)\varphi(\mathbf{r}_2)\,\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{n})\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \quad (3.12)$$

H — внешнее магнитное поле, а $\varphi(\mathbf{r})$ — атомная волновая функция d-электрона;

$$B_{\mathbf{g}} = \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{g}\mathbf{n}}\,[(J_{\mathbf{n}}^{xx} - E_{\mathbf{n}}^{xx}) - (J_{\mathbf{n}}^{yy} - E_{\mathbf{n}}^{yy}) - 2i(J_{\mathbf{n}}^{xy} - E_{\mathbf{n}}^{xy})], \quad (3.13)$$

где $E_{\mathbf{n}}^{jl}$ и $J_{\mathbf{n}}^{jl}$ $(j, l \equiv x, y, z)$ получаются соответственно из (3.11) и (3.12)

заменой $r_{12}^{-3}\left(1-3\frac{z_{12}^2}{r_{12}^2}\right)$ на $3r_{12}^{-5}(\mathbf{r}_{12})_j(\mathbf{r}_{12})_l$;

$$D(\mathbf{k}\sigma;\mathbf{k}\sigma)=C(\mathbf{k})-\frac{1}{2}I(\mathbf{k},\mathbf{k})+ \\ +\sigma\{I(\mathbf{k},\mathbf{k})-2[K(\mathbf{k},\mathbf{k})-R(\mathbf{k},\mathbf{k})]\}, \tag{3.14}$$

$$D(\mathbf{k}^+,\mathbf{k}^-)=D^*(\mathbf{k}^-,\mathbf{k}^+)=[(R^{xz}(\mathbf{k},\mathbf{k})-K^{xz}(\mathbf{k},\mathbf{k}))- \\ -i(R^{yz}(\mathbf{k},\mathbf{k})-K^{yz}(\mathbf{k},\mathbf{k}))], \tag{3.15}$$

где

$$C(\mathbf{k})=N\int|\varphi(\mathbf{r}_1)|^2V(r_{12})|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2)|^2\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \tag{3.16}$$

$$I(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=N\int\varphi^*(\mathbf{r}_1)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_2)V(r_{12})\varphi(\mathbf{r}_2)\psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \tag{3.17}$$

$$K(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=N\mathfrak{M}^2\int|\varphi(\mathbf{r}_1)|^2r_{12}^{-3}\left(1-3\frac{z_{12}^2}{r_{12}^2}\right)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_2)\psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \tag{3.18}$$

$$R(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=N\mathfrak{M}^2\int\varphi^*(\mathbf{r}_1)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_2)r_{12}^{-3}\left(1-3\frac{z_{12}^2}{r_{12}^2}\right)\varphi(\mathbf{r}_2)\psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2, \tag{3.19}$$

($\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — нелокализованная волновая функция s-электрона в решетке), а $K^{jl}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ и $R^{jl}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ получаются соответственно из $K(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ и $R(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ заменой $r_{12}^{-3}\left(1-3\frac{z_{12}^2}{r_{12}^2}\right)$ на $3r_{12}^{-5}(\mathbf{r}_{12})_j(\mathbf{r}_{12})_l$; наконец, в (3.6) и (3.7)

$$C_{\mathbf{g}}=\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{n}}e^{i\mathbf{g}\mathbf{n}}[(J_{\mathbf{n}}^{xz}-E_{\mathbf{n}}^{xz})+i(J_{\mathbf{n}}^{yz}-E_{\mathbf{n}}^{yz})], \tag{3.20}$$

$$C_{\mp}^{(0)}(\mathbf{k},\mathbf{g})=-\frac{1}{\sqrt{N}}[I(\mathbf{k},\mathbf{k}\mp\mathbf{g})+K(\mathbf{k},\mathbf{k}\mp\mathbf{g})-R(\mathbf{k},\mathbf{k}\mp\mathbf{g})], \tag{3.21}$$

$$C_{-}^{(1)}(\mathbf{k}^+,\mathbf{g})=C_{+}^{(1)*}(\mathbf{k}^+,-\mathbf{g})=-C_{-}^{(1)}(\mathbf{k}^-,\mathbf{g})=-C_{+}^{(1)*}(\mathbf{k}^-,-\mathbf{g})= \\ =\frac{1}{\sqrt{N}}\{[R^{xz}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})-iR^{yz}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})]- \\ -[K^{xz}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})-iK^{yz}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})]\}, \tag{3.22}$$

$$C_{-}^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{g})=C_{+}^{(2)*}(\mathbf{k},-\mathbf{g})=\frac{1}{\sqrt{N}}\{[R^{xx}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})-R^{yy}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})+ \\ +2iR^{xy}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})]-[K^{xx}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})-K^{yy}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})+ \\ +2iK^{xy}(\mathbf{k}-\mathbf{g},\mathbf{k})]\}. \tag{3.23}$$

Используя формулы (3.10) — (3.19), найдем прежде всего конкретные выражения для энергии ферромагнона (3.4) и энергии электрона проводимости (3.5).

Заметим, что коэффициенты (3.9) и (3.13) выражаются через интегралы двух типов: квази-классические ($E_{\mathbf{n}}$ и $E_{\mathbf{n}}^{jl}$) и обменные ($I_{\mathbf{n}}$, $J_{\mathbf{n}}$ и $J_{\mathbf{n}}^{jl}$). Если считать, как это обычно делается [13], что магнитные моменты d-электронов «привязаны» к соответствующим узлам решетки (что формально сводится к замене квадрата модуля атомной функции $\varphi(\mathbf{r})$ дельта-функцией: $|\varphi(\mathbf{r})|^2=\delta(\mathbf{r})$), то при отбрасывании членов с магнитными обменными интегралами $J_{\mathbf{n}}$ и $J_{\mathbf{n}}^{jl}$ коэффициенты $A_{\mathbf{g}}$ и $B_{\mathbf{g}}$ точно совпадают с соответствующими величинами из работы [13]. Преимущество принятого здесь метода расчета — возможность одновремен-

ного и автоматического учета как квази-классического, так и анизотропного (магнитного) обменного взаимодействия.

Интегралы $E_{\mathbf{n}}$ и $E^{jl}_{\mathbf{n}}$ сравнительно медленно убывают с расстоянием ($\mathbf{n}$) между узлами решетки, поэтому для них при суммировании в (3.9) и (3.13) нельзя ограничиться приближением ближайших соседей. В работе [13] суммирование в этом случае заменяется интегрированием по всему объему кристалла. Наоборот, интегралы обменного типа $I_{\mathbf{n}}$, $J_{\mathbf{n}}$ и $J^{jl}_{\mathbf{n}}$ быстро уменьшаются с увеличением расстояния между узлами, поэтому при вычислении соответствующих им частей коэффициентов $A_{\mathbf{g}}$ и $B_{\mathbf{g}}$ можно ограничиться приближением ближайших соседей (другими словами, при малых $\mathbf{g}$ можно разложить экспоненты в (3.9) и (3.13) в ряд по степеням ($\mathbf{gn}$)). Так, например, для кубической решетки при условии слабого возбуждения ($ag \ll 1$) получим*:

$$A_{\mathbf{g}} = [I - J(1-3\cos^2\theta_g)](ag)^2 + 4\pi\mathfrak{M}M_0\sin^2\theta_g + 2\mathfrak{M}H, \tag{3.24}$$

$$B_{\mathbf{g}} = [4\pi\mathfrak{M}M_0 - \sqrt{(J^2+J'^2)}(ag)^2]\sin^2\theta_g e^{2i\varphi_g}, \tag{3.25}$$

где θ_g и φ_g — соответственно полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{g}$, a — постоянная решетки, $M_0 = \mathfrak{M}a^{-3}$ — магнитный момент единицы объема при $T = 0°\,\mathrm{K}$, $I = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{n}} n^{(x)2} I_{\mathbf{n}}$ — величина порядка интеграла обменного электростатического взаимодействия между ближайшими соседями,

$$J = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{n}}(n^{(x)2} - n^{(y)2})J^{xx}_{\mathbf{n}}, \quad J' = \sum_{\mathbf{n}} n^{(x)}n^{(y)}J^{xy}_{\mathbf{n}}$$

— величины, характеризующие обменное магнитное взаимодействие.

Если ограничиться рассмотрением области температур, в которой $\overline{I(ag)^2} \sim \varkappa T \gg \frac{\mathfrak{M}^2}{a^3}$, т. е. $T \gg 0{,}1°\,\mathrm{K}$ (с другой стороны, конечно, $T \ll T_{\text{к}}$, где $T_{\text{к}}$ — точка Кюри), то $A_{\mathbf{g}} \gg |B_{\mathbf{g}}|$ и, следовательно, согласно (3.4), $\varepsilon_{\mathbf{g}} \approx A_{\mathbf{g}}$. Если к тому же мы не интересуемся эффектами магнитной анизотропии, то последнее выражение можно еще более упростить, пренебрегая в нем угловой зависимостью, для чего следует заменить в (3.24) $\cos^2\theta_g$ и $\sin^2\theta_g$ их средними по всему пространству квази-импульсов значениями, равными соответственно $^1/_3$ и $^2/_3$. В этом приближении имеем

$$\varepsilon_{\mathbf{g}} = I(ag)^2 + 2\mathfrak{M}H', \tag{3.26}$$

где

$$H' = H + \frac{4\pi}{3}M_0.$$

Таким образом, магнитное взаимодействие между электронами учитывается лишь как причина некоторого среднего (лорентцевского) внутреннего поля $\frac{4\pi}{3}M_0$, добавляемого к внешнему полю.

При вычислении энергии электрона проводимости, согласно формуле (3.5), учтем, что обменный электростатический интеграл $I(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ значительно больше магнитных интегралов $K^{jl}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ и $R^{jl}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ и, следовательно,

$$D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^+) - D(\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^-) \gg |D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^-)|.$$

---

* Вектор $\mathbf{n}$ в этом случае имеет составляющие: $n^{(x)}a$, $n^{(y)}a$, $n^{(z)}a$.

Поэтому можно приближенно положить

$$E_{\mathbf{k}\sigma} = E^0_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}(1+2\sigma)\,D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^+) + \frac{1}{2}(1-2\sigma)\,D(\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^-). \qquad (3.27)$$

Представим теперь волновую функцию $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ электрона в (3.16)—(3.19) в виде ряда по «атомным» функциям s-состояния:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}} \chi(\mathbf{r}-\mathbf{n}). \qquad (3.28)$$

Тогда интегралы (3.16) — (3.19) будут представляться в виде двойных сумм по узлам решетки. Причем для интегралов обменного типа $I(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, $R(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и $R^{jl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в обеих суммах можно ограничиться приближением ближайших соседей. Для интегралов квази-классического типа $E(\mathbf{k})$, $K(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, $C(\mathbf{k})$ и $K^{jl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ это приближение можно использовать только в одной из сумм. Вторая же сумма должна быть распространена на весь объем кристалла. Для интегралов $K(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и $K^{jl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ последнее суммирование можно заменить интегрированием. Примем также приближение эффективной массы, т. е. в тех случаях, где можно ограничиться приближением ближайших соседей, разложим величины $e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}}$ в ряд по степеням $\mathbf{k}\mathbf{n}$ и пренебрежем членами выше второй степени. С учетом этих замечаний для (3.27) получим [12]:

$$E_{\mathbf{k}\sigma} = 2\sigma(\alpha' + \mathfrak{M}H') + \frac{\hbar^2(k_x^2+k_y^2)}{2m_\perp^\sigma} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_\parallel^\sigma}, \qquad (3.29)$$

где

$$m_\perp^\sigma = \frac{\hbar^2}{2a^2[\beta - 2\sigma(\beta' + R)]} \qquad (3.30)$$

— «поперечная» эффективная масса, а

$$m_\parallel^\sigma = \frac{\hbar^2}{2a^2[\beta - 2\sigma(\beta' - 2R)]} \qquad (3.31)$$

— «продольная» эффективная масса электронов проводимости. Таким образом, эффективная масса электронов проводимости в ферромагнитном переходном металле оказывается анизотропной величиной, причем тензор эффективной массы обладает аксиальной симметрией (в кубическом кристалле!). Подобное выражение для эффективной массы можно, повидимому, применить и для изотропного поликристаллического образца, намагниченного до насыщения вдоль оси z. Этот результат в принципе дает возможность объяснить разницу в величинах продольного и поперечного электросопротивления ферромагнитного металла, намагниченного до насыщения [14]*.

Если пренебречь анизотропными добавками, то (3.29) примет вид:

$$E_{\mathbf{k}\sigma} = 2\sigma(\alpha' + \mathfrak{M}H') + (\beta - 2\sigma\beta')\,(ak)^2. \qquad (3.32)$$

Это выражение при $H' = 0$ совпадает с соответствующим выражением из работы [9].

Приведем, наконец, выражения для амплитуд вероятностей переходов (3.20) — (3.23), вычисленные в тех же приближениях, что и $\varepsilon_{\mathbf{g}}$, $E_{\mathbf{k}\sigma}$. При этом для величин $C^{(1)}_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{g})$ и $C^{(2)}_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{g})$ в качестве одного из полярных углов выберем угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}$. С точностью до первых, не равных нулю членов в разложении в ряд по $\mathbf{g}$ и до членов не выше второго порядка в разложении по степеням $\mathbf{k}$ имеем:

* Соответствующее рассмотрение для энергии электрона проводимости можно было бы провести для области температур, близких к точке Кюри, приняв для d-электронов приближение энергетического центра тяжести [11]. В этом случае в (3,29) величину σ необходимо заменить на $\sigma\mu$, где μ — намагниченность (в магнетонах Бора), приходящаяся на один узел.

а) Для столкновений ферромагнонов друг с другом:

$$C_{\mathbf{g}} = -\frac{1}{\sqrt{N}}[4\pi W_0 + J'(ag)^2]\sin 2\theta_g e^{-i\varphi_g}, \tag{3.33}$$

где $W_0 = \mathfrak{M}^2 a^{-3}$. Это выражение отличается от соответствующего выражения из работы А. И. Ахиезера [15] вторым членом в квадратной скобке, появление которого обусловлено учетом обменного магнитного взаимодействия. Так как среднее значение $(ag)^2$ равно $\frac{\varkappa T}{I} \sim \frac{T}{T_{\text{к}}}$, то влияние на среднюю вероятность столкновения анизотропного обмена с понижением температуры уменьшается и в области температур $T \ll \frac{W_0}{J'} T_{\text{к}}$ становится пренебрежимо малым по сравнению с влиянием квази-классического магнитного взаимодействия. Если считать, что обменный магнитный интеграл J' имеет такой же порядок величины, как и W_0, то это будет справедливо во всей рассматриваемой области температур $T \ll T_{\text{к}}$. Если, однако, предположить, что J' на порядок величины (или даже на два порядка) больше, чем W_0, как это иногда считают при объяснении явлений магнитной анизотропии, то влияние анизотропного обмена будет существенным и в весьма широкой области низких температур.

б) Для столкновений ферромагнонов с электронами проводимости: при $\Delta m = 0$

$$C_{\pm}^{0}(\mathbf{k}, \mathbf{g}) = -\frac{1}{\sqrt{N}}\{2\alpha' - \beta' a^2 [k^2 - (\mathbf{k} \pm \mathbf{g})^2]\}; \tag{3.34}$$

здесь опущены члены, обусловленные магнитным взаимодействием, так как они имеют такие же степени зависимости от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}$, но сами значительно меньше по порядку величины, чем члены в (3.34);

при $\Delta m = \pm 1$

$$C_{\pm}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{g}) = -\frac{R}{\sqrt{N}}(ak)^2 \sin\theta_{kg}\left(\cos\theta_{kg} \pm \frac{g}{2k}\right) e^{-i\varphi_k}, \tag{3.35}$$

при $\Delta m = \pm 2$

$$C_{\pm}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{g}) = -\frac{1}{\sqrt{N}}(ak)^2 \sin^2\theta_{kg}(R\cos 2\varphi_k - iR' \sin 2\varphi_k). \tag{3.36}$$

Из других типов магнитного взаимодействия в рамках принятой модели оказывается возможным учесть взаимодействие магнитных спиновых моментов d-электронов с магнитными полями, связанными с движением электронов проводимости (условно это взаимодействие можно назвать «спин-орбитальным»). Оператор (3.1), соответствующий этому взаимодействию, будет иметь вид:

$$\hat{\Phi}_{\text{с-о}}(jj') = -i4\mathfrak{M}^2 r_{jj'}^{-3}[\mathbf{r}_{jj'} \cdot \nabla_{j'}]\hat{\mathbf{S}}_j, \tag{3.37}$$

где индекс j относится к d-электрону, а индекс j' — к s-электрону. В принятых приближениях это взаимодействие не оказывает никакого влияния на величину энергии ферромагнона и энергии электрона проводимости, так как отличные от нуля матричные элементы оператора (3.37) входят лишь в выражение для амплитуд вероятностей столкновений ферромагнонов с электронами проводимости и не входят в (3.26) и (3.29). Такое взаимодействие d- и s-электронов может приводить только к процессам столкновений типа $\Delta m = \pm 1$ (это обусловлено линейностью оператора (3.37) относительно $\hat{\mathbf{S}}$). Приближенный расчет дает для вероятностей столкновений в первом приближении следующее выражение:

$$C_{\pm}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{g}) = \pm\frac{8\pi W_0 L k}{\sqrt{N} g}\sin\theta_{kg} e^{i\varphi_k}, \tag{3.38}$$

где

$$L = a\sum_{\mathbf{n}} n^{(x)} \int \chi(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x}\chi(\mathbf{r} - \mathbf{n})\, d\mathbf{r}.$$

Если в качестве волновых функций s-электронов взять вместо (3.28) обычные волновые функции свободного электрона (плоские волны), то в выражении (3.38) L будет равно единице.

Приведенные результаты по расчету энергетического спектра системы внешних и внутренних электронов ферромагнитного переходного металла, а также по расчету вероятностей квантовых переходов в этой системе позволяют развить теорию релаксационных процессов и теорию электропроводности ферромагнетиков в области низких температур. Эти вопросы подробно изложены в двух докладах Е. А. Турова [16].

Всю приведенную выше схему можно обобщить и на случай антиферромагнитных переходных металлов [17]. В этих металлах нулевое состояние является синглетным с антипараллельным упорядоченным распределением спинов по узлам решетки. До сих пор не доказано, что такое состояние действительно является состоянием с наинизшей энергией. Однако опыты с диффракцией нейтронов [18] позволяют принять гипотезу об упорядоченных магнитных подрешетках. В случае антиферромагнетиков малые отклонения от полного магнитного порядка в области низких температур носят также характер спиновых волн, или антиферромагнонов. Однако для этих возбуждений дисперсионный закон отличается от такового для ферромагнетиков. А именно, вместо (3.26) имеем «линейный» закон:

$$\varepsilon_g \approx \alpha g. \tag{3.39}$$

Поэтому температурная зависимость электропроводности антиферромагнитных металлов переходных групп имеет иной характер, чем у ферромагнетиков. Это различие связано с той частью электропроводности, которая обусловлена в антиферромагнетиках столкновениями электронов проводимости с антиферромагнонами, а в ферромагнетиках — с ферромагнонами. А именно, у антиферромагнетиков

$$\rho_{\text{афм}} = a_1 T^2 + a_2 T^4, \tag{3.40}$$

в то время как у ферромагнетиков «ферромагнонное» электросопротивление имеет вид:

$$\rho_{\text{фм}} = b_1 T + b_2 T^2. \tag{3.41}$$

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что члены взаимодействия между электронами проводимости в операторе (3.2) отсутствуют. Фактически же они существуют и представляются выражением:

$$\hat{H}_{ss} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \sigma_1, \sigma_2} F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2') \hat{a}^+_{\mathbf{k}_1\sigma_1} \hat{a}^+_{\mathbf{k}_2\sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_2'\sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1'\sigma_1}. \tag{3.42}$$

Если (3.42) можно рассматривать как возмущение, то этот член гамильтониана можно рассматривать как причину столкновений электронов проводимости друг с другом. Эти столкновения также влияют на электропроводность металла. Температурная зависимость этой части электропроводности имеет вид [19]:

$$\rho_{ss} \approx \alpha T^2 + \beta T^3. \tag{3.43}$$

В рамках одноэлектронной теории металлов этот вопрос был рассмотрен Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком [20].

В связи с тем, что для температурной зависимости электросопротивления переходных металлов получаются сложные «многочленные» формулы, возникает необходимость их детальной экспериментальной проверки. При этом весьма желательно было бы продумать такую систему экспериментов, которая позволяла бы по желанию включать или выключать отдельные «механизмы», приводящие к тем или иным членам в выражении для электросопротивления. Повидимому, в осуществлении этих экспериментов важную роль должны сыграть методы магнитной радиоспектроскопии и ферромагнитного резонанса.

4

До сих пор принято было считать, что во всех металлах квази-частицы — носители электрического тока — являются электронами проводимости, подчиняющимися статистике Ферми. В этом как будто бы убеждал нас универсальный характер зависимости электросопротивления металлов при низких температурах (закон T^5). Однако более внимательный анализ опытных данных показывает, что закон T^5 вовсе не носит столь универсального характера. Одна из возможных причин такой неуниверсальности этого закона в нормальных (не переходных) металлах может заключаться в том, что носителями тока являются не фермионы, а бозоны. В связи с этим необходимо остановиться кратко на так называемой полярной модели металлов (см., например, [21]), полупроводников и полуметаллов. Известно, что полупроводники отличаются от металлов тем, что в первых имеет место в основном состоянии однородное распределение электронного заряда по кристаллу, которое не изменяется при наложении внешних электрических полей (если они настолько слабы, что не вызывают ионизации).

Однако возможны отклонения от этого однородного распределения. Эти отклонения могут быть различной природы: возможны флюктуации плотности заряда, флюктуации плотности одноэлектронных состояний по узлам, спиновые флюктуации и т. п. В качестве примера первого типа флюктуаций можно указать элементарные возбуждения, возникающие в результате ионизации отдельных узлов решетки. Каждая такая ионизация приводит к появлению в кристалле двух квази-частиц — «двойки» и «дырки», которые в силу трансляционной симметрии будут свободно распространяться по решетке и переносить по ней электрический заряд. Так как в данном случае нет предельного импульса и на число этих частиц с данным квази-импульсом не накладывается никаких ограничений, то эти частицы подчиняются статистике Бозе. Среди них можно выделить две подгруппы — возбуждения типа «слипшихся» двойки и дырки (аналог эллиптических орбит в атоме), не несущих с собой тока, а также возбуждения типа «свободных» дырок и двоек, могущих переносить ток (гиперболические орбиты!). Кроме таких «невозбужденных» двоек (когда оба электрона в двойке находятся в одном и том же орбитальном состоянии, но с противоположными проекциями спина), можно представить себе нарушение однородности распределения электронного заряда в кристалле при помощи волн возбуждения, или «экситонов». В этом случае около узлов происходит возбуждение электронов. При этом по решетке может распространяться либо только волна возбуждения без переноса заряда (френкелевские бестоковые экситоны), либо по решетке распространяется электрон в возбужденном состоянии, переходя от узла к узлу, независимо от наличия там другого валентного электрона (токонесущие экситоны). При этом последнем типе экситонов дырка, которую электрон оставил при возбуждении и переходе к соседним узлам, также путешествует по кристаллу, благодаря «эстафетным» переходам электронов из соседних узлов.

Все эти соображения могут быть перенесены и на случай металлов и полуметаллов. В полупроводниках при 0° К экситоны всех типов отсутствуют. В случае же металлов и при 0° К возможен конечный ток. Это означает, что в данном случае отсутствует энергетическая щель между основным состоянием и возбужденными, и токовые состояния непосредственно примыкают к наинизшему уровню. Можно ожидать, что в металлах имеет место самопроизвольная поляризация в системе электронов, и поэтому даже энергетически наинизшему состоянию соответствует конечное число двоек, дырок или токовых экситонов. Явление самопроизвольной поляризации трудно понять в грубо классической схеме. Однако квантовая механика предсказывает возможность самопроизвольной поляризации

в том случае, если нижний энергетический уровень полосы энергий, соответствующей поляризованным состояниям, будет ниже минимального уровня полосы однородного распределения заряда, хотя центры тяжести этих энергетических полос, в соответствии с классической теорией, всегда выше для поляризованных состояний.

Можно различать два случая: слабо поляризованного металла (число дырок и двоек мало) и сильно поляризованного (число двоек и дырок близко к максимально возможному). В обоих случаях можно ввести квази-частицы, описывающие отклонения от однородного распределения электронного заряда. Эти квази-частицы подчиняются статистике Бозе.

Расчет показал, что как в случае слабо поляризованного [22], так и сильно поляризованного металла [23] с бозевским электронным энергетическим спектром температурная зависимость электросопротивления имеет вид, резко отличный от закона T^5, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= aT && \text{при } T < \theta_1, \\ \rho &= bT^2 && \text{при } \theta_1 < T < \theta, \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

где $\theta_1 \sim 1 \div 10^\circ$ K, а θ — дебаевская температура. Такая температурная зависимость имеет место для «плохих» металлов: гафния, графита, циркония, цезия, вольфрама, калия, мышьяка и др.

В рамках полярно-экситонной модели удалось рассмотреть ряд свойств полупроводников. В частности, в случае ферромагнитных полупроводников, у которых самопроизвольная намагниченность определяется возбужденными состояниями, последняя должна исчезать не только в точке Кюри, но и при 0° K [24]. Такой зависимости не будет, если в намагниченности основную роль играют нормальные (однородные относительно возбужденных состояний, но неоднородные по спину) состояния электронной системы в кристалле.

Оказалось возможным определить и температурную зависимость электропроводности атомных полупроводников без примесей в рамках этой модели [25].

Эта же модель объясняет существование так называемых полуметаллов, т. е. веществ, у которых в разных температурных интервалах имеет место либо металлический, либо полупроводниковый температурный ход электросопротивления. Наличие самопроизвольной поляризации при низких температурах обеспечивает металлическую проводимость, а с повышением температуры начинает играть доминирующую роль эффект возбуждения, поставляющий новые партии электронов проводимости, что и приводит к типичной для полупроводника температурной зависимости электропроводности. Примером таких веществ могут служить селениды свинца, хрома, серы и др.

Метод квази-частиц оказалось возможным применить также и к исследованию магнитных и электрических свойств более сложных кристаллических систем, чем чистые металлы и полупроводники. Например, удалось показать, что в случае ферромагнитных ферритов [26] для температурной зависимости самопроизвольной намагниченности при низких температурах имеет место не закон $T^{3/2}$, а закон T^2, что хорошо подтверждается опытами Потене [27] на примере железного, никелевого и кобальтового ферритов.

5

Метод квази-частиц как метод трактовки квантовомеханической теории конденсированных фаз является приближенным методом. Однако именно в области низких температур он дает достаточно точные предсказания о характере общих закономерностей физических свойств твердых тел. Для детальной проверки выводов теории и ее корректировки весьма желательны и необходимы тщательные и систематические экспериментальные

исследования физических свойств кристаллов в области низких и сверхнизких температур. Можно смело сказать, что широкое экспериментальное исследование твердого тела в области низких температур будет в значительной мере определять весь прогресс наших теоретических представлений о свойствах конденсированных систем.

Институт физики металлов
Уральского филиала
Академии наук СССР

Цитированная литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика.— Гостехиздат, М.— Л., 1951.
2. Зубарев Д. Н., ЖЭТФ, 25, 548 (1953).
3. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., 5, 544 (1950).
4. Bohm D., Pines D., Phys. Rev., 82, 625 (1951); 85, 338 (1952); 92, 609 (1952).
5. Зырянов П. С., ЖЭТФ, 25, 441 (1953).
6. Вонсовский С. В., ЖЭТФ, 16, 981 (1946).
7. Вонсовский С. В., Современное учение о магнетизме, § 17.— Гостехиздат, М.— Л., 1953.
8. Вонсовский С. В., ЖЭТФ, 18, 145 (1948).
9. Вонсовский С. В., Туров Е. А., ЖЭТФ, 24, 419 (1953).
10. Туров Е. А., ДАН СССР, 98, 945 (1954).
11. Вонсовский С. В., Власов К. Б., Туров Е. А., ЖЭТФ, 29. 37 (1955).
12. Туров Е. А., Диссертация, Свердловск, 1955.
13. Holstein T., Primakoff H., Phys. Rev., 58, 1098 (1940).
14. Вонсовский С. В., Родионов К. П., ДАН СССР, 75, 643 (1950).
15. Ахиезер А. И., Journ. of Phys., 10, 217 (1946).
16. Туров Е. А., см. настоящий номер журнала, стр. 462 и 474.
17. Бердышев А. А., Вонсовский С. В., Изв. АН СССР, Серия физич., 18, 328 (1954).
18. Schull C. G., Smart I. S., Phys. Rev., 76, 1256 (1949).
19. Вонсовский С. В., Бердышев А. А., ЖЭТФ, 25, 723 (1953).
20. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я., ЖЭТФ, 7, 379 (1937).
21. Шубин С. П. и Вонсовский С. В., Sow. Phys., 7, 292 (1935).
22. Вонсовский С. В., Власов К. Б., Соколов А. В., ЖЭТФ, 21, 1185 (1951).
23. Вонсовский С. В., Падучев. Б В., ЖЭТФ, 25, 571 (1953).
24. Вонсовский С. В., Галишев В. С., ЖЭТФ, 25, 584 (1953).
25. Вонсовский С. В. и Агафонова Е. Н., Сб., посвящ. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, стр. 92.— Изд. АН СССР, М.— Л., 1950.
26. Вонсовский С. В., Сеидов Ю. М., Изв. АН СССР, Серия физич., 18, 319 (1954).
27. Pauthenet R., Ann. de phys., 7, 710 (1952).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

Е. А. ТУРОВ

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛАХ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1. Введение

1. Целью настоящей работы является обобщение теории релаксационных процессов в ферромагнетиках, развитой А. И. Ахиезером [1] для ферродиэлектриков, на случай ферромагнитных металлов. Сущность обобщения состоит в учете активной роли электронов проводимости в этих процессах.

Простейшая модель ферромагнетика, пригодная для решения указанной задачи,— это *s-d*-обменная модель переходных металлов [2]. При исследовании релаксационных процессов в рамках этой модели, наряду с электростатическим взаимодействием ферромагнитных электронов одного с другим и с электронами проводимости, необходимо учитывать также и магнитное (анизотропное) взаимодействие между ними. Вопрос о последовательном учете магнитного взаимодействия в рамках этой модели изложен в статьях С. В. Вонсовского и нашей [3, 4*].

В дальнейшем нам приходится ссылаться на формулы этой статьи С. В. Вонсовского; при этих ссылках формулы будут цитироваться под своими номерами с добавлением перед номером формулы римской цифры I.

2. Идеальный ферромагнитный металл в области низких температур можно рассматривать как совокупность трех подсистем квази-частиц — ферромагнонов (или спиновых волн), фононов (или колебаний решетки) и электронов проводимости. Релаксационные явления в такой смеси квази-частиц определяются процессами столкновений между ними.

Пусть система ферромагнонов выведена каким-либо образом из состояния равновесия (например путем быстрого изменения намагничивающего внешнего поля или путем «нагревания» спин-системы при резонансном поглощении энергии микроволнового магнитного поля). Тогда благодаря столкновениям ферромагнонов друг с другом, с фононами и электронами проводимости эта система снова придет в состояние равновесия через некоторый промежуток времени, который мы назовем полным временем релаксации ферромагнитной системы τ. Если начальное отклонение от равновесия мало, то τ приближенно равняется среднему времени жизни каждого из избыточных ферромаг-

---

* Прежде чем пользоваться работой [4], необходимо в ней устранить следующие опечатки и описки: 1) в последнем члене формулы (3) заменить $\hat{a}_{\mathbf{n}\sigma_2'}$ на $\hat{a}_{\mathbf{n}\sigma_1'}$; 2) в последнем члене формулы (10) исправить $\hat{b}^+_{\mathbf{g}}$ на $\hat{b}^+_{\mathbf{g}_1}$; 3) на стр. 947 в выражении для A_g (в 6-й строке сверху) перед членом $F(0^+, \mathbf{n}^-; \mathbf{n}^+, 0^-)$ заменить знак «+» на «—» и закрыть после этого члена квадратную скобку; 4) в следующей строке квадратную скобку надо открыть не перед экспонентой $e^{i\mathbf{gn}}$, а после нее; 5) в первой из формул (11″) внести знак «—» перед $(1/2)$ внутрь скобок, а во второй формуле (11″) знак в показателе экспоненты сменить на обратный; 6) к формуле (11′) добавить условия $l_+ > 0$, $l_- < 0$; 7) формулу (14) заменить на следующую:

$$E_{\mathbf{k}\sigma} = E_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\,[D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^+) + D(\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^-)] + \sigma\sqrt{[D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^+) - D(\mathbf{k}^-, \mathbf{k}^-)]^2 + 4\,|D(\mathbf{k}^+, \mathbf{k}^-)|^2}.$$

нонов (для определенности будем считать, что спин-система «нагрета»). Последнее, в свою очередь, является величиной, обратной средней вероятности расщепления ферромагнона в одну секунду (с учетом, конечно, и процессов рождения). Будем называть эту вероятность средней частотой релаксации — $\bar{w}$.

Выражение для полной частоты релаксации может складываться из нескольких членов, из которых каждый соответствует одному из возможных механизмов столкновения, и поэтому в общем случае время релаксации τ можно определить при помощи следующего равенства:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_i \bar{w}^{(i)}, \qquad (1)$$

где $\bar{w}^{(i)}$ — средняя частота релаксации, соответствующая i-тому механизму столкновений.

Частоты релаксации для столкновений ферромагнонов друг с другом $\bar{w}_{\text{с-с}}$ (спин-спиновая релаксация) и для столкновений ферромагнонов с колебаниями решетки $\bar{w}_{\text{с-р}}$ (спин-решеточная релаксация) были рассчитаны А. И. Ахиезером [1]. При этом оказалось, что при достаточно низких температурах (по оценке Ахиезера $T < 10°$ К) равновесие между самими ферромагнонами устанавливается значительно скорее, чем между ферромагнонами и фононами, т. е., что $\bar{w}_{\text{с-с}} \gg \bar{w}_{\text{с-р}}$. Следовательно, в сумме (1) членом $\bar{w}_{\text{с-р}}$ можно пренебречь по сравнению с $\bar{w}_{\text{с-с}}$.

Отличительная особенность металлических ферромагнетиков по сравнению с ферродиэлектриками — появление в сумме (1) членов, обусловленных столкновениями ферромагнонов с электронами проводимости.

Вычисление средних частот релаксации $\bar{w}^{(i)}_{\text{с-э}}$, (спин-электронной релаксации), соответствующих различным механизмам столкновения ферромагнонов с электронами проводимости, сравнение их между собой с целью выявления основного механизма, а также оценка роли электронов проводимости в ферромагнитной релаксации и составляют основную конкретную цель настоящей работы.

§ 2. Средняя частота спин-электронной релаксации $\bar{w}^{(i)}_{\text{с-э}}$

1. Процессы столкновения между ферромагнонами и электронами проводимости — назовем их для краткости спин-электронными столкновениями — описываются оператором, данным нами в работе [4] (формула (10)), причем первые два члена обусловливают процессы «поглощения» и «испускания» ферромагнонов электронами проводимости (неупругие столкновения), а последний член — процессы взаимного рассеяния ферромагнонов и электронов проводимости без изменения числа квазичастиц (упругие столкновения). В настоящей работе мы будем рассматривать только процессы неупругих столкновений, т. е. только такие, при которых число ферромагнонов в системе может изменяться.

Соответствующая этим процессам часть оператора энергии в более развернутом виде представлена выражением (I, 3.7), причем 1-я, 2-я и 3-я строки этого выражения соответственно описывают процессы типа: 1) $\Delta m = 0$, 2) $\Delta m = \pm 1$ и 3) $\Delta m = \pm 2$, т. е. процессы, при которых магнитное квантовое число всей системы m соответственно 1) остается неизменным, 2) изменяется на единицу, 3) изменяется на две единицы.

Среднюю частоту спин-электронной релаксации для процессов столкновений i-того типа ($i = 0, 1, 2$) мы будем определять из соотношений вида:

$$\bar{w}^{(i)}_{\text{с-э}} = \left(\sum_{\mathbf{g}} \bar{N}_{\mathbf{g}}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{g}} w^{(i)}_{\mathbf{g}} \bar{N}_{\mathbf{g}}, \qquad (2)$$

$$w^{(i)}_{\mathbf{g}} = -(\Delta N_{\mathbf{g}})^{-1} \frac{d}{dt} \Delta N_{\mathbf{g}}, \qquad (3)$$

где $\Delta N_{\mathbf{g}}$ — отклонение числа ферромагнонов в состоянии $\mathbf{g}$ от своего равновесного значения

$$\overline{N}_{\mathbf{g}} = (e^{\varepsilon_{\mathbf{g}}/\varkappa T} - 1)^{-1}. \tag{4}$$

Уравнения (3) получаются путем линеаризации относительно $\Delta N_{\mathbf{g}}$ правой части соответствующих кинетических уравнений

$$\frac{d}{dt}\Delta N_{\mathbf{g}} = b_i - a_i,$$

описывающих изменение числа ферромагнонов в состоянии $\mathbf{g}$, обусловленное процессами столкновения данного типа (b_i — число испускаемых, а a_i — число поглощаемых электронами проводимости ферромагнонов с квази-импульсом $\mathbf{g}$ в одну секунду).

Для конкретных расчетов частот спин-электронной релаксации $\overline{w}^{(i)}_{\text{с-э}}$ необходимо знать, во-первых, дисперсионные законы для энергии квазичастиц и, во-вторых, амплитуды вероятностей соответствующих квантовых переходов. И то, и другое определяется, очевидно, конкретным видом оператора энергии взаимодействия между электронами $\hat{\Phi}(j, j')$ [см. (I, 3.1)].

Мы будем учитывать следующие типы взаимодействия между электронами: 1) электростатическое взаимодействие d-электронов друг с другом и с электронами проводимости, 2) магнитное спин-спиновое взаимодействие d-электронов друг с другом и с электронами проводимости и 3) взаимодействие магнитных спиновых моментов d-электронов с магнитным полем, связанным с движением электронов проводимости (спин-орбитальное взаимодействие).

Приближенные выражения для энергии ферромагнонов ($\varepsilon_{\mathbf{g}}$) и энергии электронов проводимости ($E_{\mathbf{k}\sigma}$), а также для амплитуд вероятностей столкновения между ферромагнонами и электронами проводимости с учетом указанных взаимодействий приведены в работе I (формулы (I, 3.26), (I, 3.32), (I, 3.34)—(I, 3.38)). Эти выражения применимы в области температур, определяемой неравенством $2\mathfrak{M}H' \ll \varkappa T \ll \varkappa T_{\text{к}}$. Поэтому все дальнейшие наши расчеты будут справедливы только для этой области температур.

2. Кинетическое уравнение, описывающее изменение $\Delta N_{\mathbf{g}}$ с временем благодаря столкновениям типа $\Delta m = 0$, согласно ((I, 3.7), 1-я строка), имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\Delta N_{\mathbf{g}} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}} |C^{(0)}_{-}(\mathbf{k}, \mathbf{g})|^2 [(N_{\mathbf{g}} + 1)(1 - \bar{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}})N^{+}_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{g}}(1 - N^{+}_{\mathbf{k}})\bar{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}]\,\delta(E^{+}_{\mathbf{k}} - \bar{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} - \varepsilon_{\mathbf{g}}), \tag{5}$$

где $C^{(0)}_{-}(\mathbf{k}, \mathbf{g})$ дается выражением (I, 3.34) и введены обозначения $N^{+}_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\bar{N}_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $E^{+}_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\bar{E}_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}\left(-\frac{1}{2}\right)$, причем в данном случае в выражении (I 3.32) для энергии $E_{\mathbf{k}\sigma}$ можно пренебречь $\mathfrak{M}H'$ по сравнению с α'.

Подставляя в правую часть (5) $N_{\mathbf{g}}$ в виде $N_{\mathbf{g}} = \overline{N}_{\mathbf{g}} + \Delta N_{\mathbf{g}}$, а $N_{\mathbf{k}\sigma} = \overline{N}_{\mathbf{k}\sigma} = (e^{(E\mathbf{k}\sigma - \varepsilon_0)/\varkappa T} + 1)^{-1}$, находим, согласно (3), $w^{(0)}_{\mathbf{g}}$ как коэффициент при $\Delta N_{\mathbf{g}}$:

$$w^{(0)}_{\mathbf{g}} = \frac{2\pi}{N\hbar}\sum_{\mathbf{k}} \{2\alpha' - \beta'[(a\mathbf{k})^2 + (a\mathbf{k} - a\mathbf{g})^2]\}^2 \times (\bar{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} - N^{+}_{\mathbf{k}})\,\delta(E^{+}_{\mathbf{k}} - \bar{E}_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} - \varepsilon_{\mathbf{g}}). \tag{6}$$

Далее производим следующие вычисления:

1) усредняем $w^{(0)}_{\mathbf{g}}$ по всем состояниям $\mathbf{g}$ согласно (2);

2) заменяем суммирование по $\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}$ интегрированием в пространстве

квази-импульсов (причем в качестве полярной оси для вектора $\mathbf{k}$ принимаем направление вектора $\mathbf{g}$);

3) проводим интегрирование по углам, причем интегрирование по углу $\theta_{\mathbf{kg}}$ снимаем при помощи δ-функции, имея в виду, что

$$\delta\left(E_{\mathbf{k}}^{+} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}^{-} - \varepsilon_{\mathbf{g}}^{-}\right) = [2(\beta+\beta')\,akag]^{-1} \times \\ \times \delta\left[\cos\theta_{\mathbf{kg}} + \frac{2\alpha' - 2\beta'(ak)^2 - (\beta+\beta'+J)(ag)^2}{2(\beta+\beta')\,akag}\right]$$

(заметим, что условие $|\cos\theta| \leqslant 1$ ограничивает область интегрирования на плоскости (ak, ag), что весьма сильно усложняет все расчеты);

4) в полученном выражении заменяем оставшиеся переменные интегрирования ak и ag на

$$x = \frac{(\beta-\beta')(ak)^2 - \bar{\varepsilon}}{\varkappa T} \quad \text{и} \quad y = \frac{J(ag)^2}{\varkappa T},$$

где, согласно работе [2]*,

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 - \alpha' = \lambda(\beta-\beta')(1-d)^{2/3}, \quad d = \frac{3(\alpha'-\lambda\beta')}{2\lambda\beta} \ll 1, \quad \lambda = (3\pi^2)^{2/3}; \qquad (7)$$

5) производим интегрирование по y; при этом верхний предел интегрирования оказывается возможным заменить на бесконечность.

В результате всех указанных расчетов находим:

$$\bar{w}_{\text{с-э}}^{(0)} = D \int\limits_{-\bar{\varepsilon}/\varkappa T}^{\infty} \frac{\left[2\alpha'\beta - \frac{2\beta\beta'}{\beta-\beta'}(\bar{\varepsilon}+\varkappa T x)\right]^2 \ln\left(e^{x-y_1(\bar{\varepsilon}+\varkappa T x)}+1\right)}{e^x+1}\,dx,$$

где

$$D = \frac{(J\varkappa T)^{1/2}}{10{,}4\pi^{3/2}\hbar(\beta+\beta')^3(\beta-\beta')},$$

$$y_1(\bar{\varepsilon}+\varkappa T x) = \frac{J}{\varkappa T}\left[\frac{(\beta+\beta')\sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}+\varkappa T x}{\beta-\beta'}} - \sqrt{\frac{\delta(\bar{\varepsilon}+\varkappa T x)}{\beta-\beta'} + 2\alpha'(\beta+\beta'+J)}}{\beta+\beta'+J}\right]^2$$

(здесь $\delta = \beta^2 - \beta'^2 - 2\beta' J$).

Последний интеграл является стандартным для статистической физики интегралом вида $\int\limits_{-\bar{\varepsilon}/\varkappa T}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{e^x+1}$ (где $f(x)$ — медленно изменяющаяся функция x) и представляется в виде ряда по степеням T [5].

Принимая во внимание, что $\varkappa T \ll J$ и β, $\alpha' \ll \bar{\varepsilon}$, $\beta' < \beta$, после весьма простых, но громоздких вычислений получаем:

$$\bar{w}_{\text{с-э}}^{(0)} = \frac{J(\alpha'-\lambda\beta')^2}{2{,}6\pi^{3/2}\hbar(\beta-\beta'^2)}\left(\frac{T}{T_{\text{к}}}\right)^{1/2}[B_1(T)+B_2(T)],$$

где $T_{\text{к}} = \frac{J}{\varkappa}$ — температура порядка точки Кюри. Здесь мы использовали приближенное соотношение

$$2\beta\left(\alpha' - \frac{\beta'\bar{\varepsilon}}{\beta-\beta'}\right) \approx 2(\beta+\beta')(\alpha'-\lambda\beta'),$$

* Мы полагаем здесь, что на каждый узел решетки приходится в среднем один электрон проводимости.

получающееся при помощи (7), и ввели обозначения

$$B_1(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}e^{-nT_0/T},\qquad B_2(T)=\frac{\pi^2 e^{-T_0/T}}{6\left(1+e^{-T_0/T}\right)},$$

где

$$T_0=Ty_1(\bar{\varepsilon})\approx\lambda\left(\frac{\alpha'}{\bar{\varepsilon}}\right)^2 T_{\text{К}}. \tag{8}$$

Рассмотрим два предельных случая: $T\gg T_0$ и $T\ll T_0$. В первом случае $B_1(T)\approx B_2(T)\approx\frac{\pi^2}{12}$, а во втором случае $B_1(T)\approx e^{-T_0/T}$, $B_2(T)\approx\frac{\pi^2}{6}e^{-T_0/T}$.

Окончательно для средней частоты спин-электронной релаксации, обусловленной процессами типа $\Delta m=0$, получаем следующие выражения:

$$\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}\approx\frac{\sqrt{\pi}\,J(\alpha'-\lambda\beta')^2}{15{,}6\hbar(\beta^2-\beta'^2)}\left(\frac{T}{T_{\text{К}}}\right)^{1/2}\qquad\text{при } T\gg T_0, \tag{9}$$

$$\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}\approx\frac{J(\alpha'-\lambda\beta')^2}{\pi^{3/2}\hbar(\beta^2-\beta'^2)}\left(\frac{T}{T_{\text{К}}}\right)^{1/2}e^{-T_0/T}\qquad\text{при } T\ll T_0. \tag{9'}$$

Критическая температура T_0, ниже которой величина $\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}$ очень быстро уменьшается, согласно (8), в сильной степени зависит от величины s-d-обменного интеграла α'. Между тем порядок величины α' точно не известен.

Если вслед за Блумбергеном [6] положить, что $\alpha'\sim10^{-14}$ эрг, а также принять, что $J\sim\beta\sim10^{-13}$ эрг и $\bar{\varepsilon}\sim10^{-12}$ эрг, то $T_0\sim1^\circ$ K и, следовательно, для $T\gg1^\circ$ K

$$\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}\sim4\cdot10^9\sqrt{T}\ \text{сек}^{-1}. \tag{10}$$

Например, при 10° К $\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}\sim10^{10}$ сек$^{-1}$.

Совершенно отличный от этого результат получается, если для α' предположить другой возможный порядок величины, а именно, $\alpha'\sim J\sim10^{-13}$ эрг [7]. В этом случае $T_0\sim100^\circ$К, и, следовательно, для $T\ll100^\circ$К

$$\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}\sim6\cdot10^{11}\sqrt{T}\cdot e^{-100^\circ/T}\ \text{сек}^{-1}. \tag{10'}$$

Например, при 10° К $\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}\sim10^8$ сек$^{-1}$.

Имеются некоторые соображения в пользу того, что более реальной является первая оценка интеграла α' [8].

3. Кинетическое уравнение для процессов типа $\Delta m=\pm1$, согласно ((I, 3.7), 2-я строка), имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\Delta N_{\mathbf{g}}=\frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}\sigma}|C_-^{(1)}(\mathbf{k},\mathbf{g})|^2\left[(N_{\mathbf{g}}+1)(1-N_{\mathbf{k}-\mathbf{g},\sigma})N_{\mathbf{k}\sigma}-\right.$$
$$\left.-N_{\mathbf{g}}(1-N_{\mathbf{k}\sigma})N_{\mathbf{k}-\mathbf{g},\sigma}\right]\delta(E_{\mathbf{k}\sigma}-E_{\mathbf{k}-\mathbf{g},\sigma}-\varepsilon_{\mathbf{g}}), \tag{11}$$

где для $C_-^{(1)}(\mathbf{k},\mathbf{g})$ необходимо взять выражение (I, 3.35) или (I, 3.38) соответственно для спин-спинового или спин-орбитального магнитных взаимодействий. Следовательно, средняя частота релаксации для процессов этого типа равна

$$\bar{w}^{(1)}_{\text{с-э}}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\sum_{\mathbf{g}}\bar{N}_{\mathbf{g}}\right)^{-1}\sum_{\mathbf{k}\sigma}|C_-^{(1)}(\mathbf{k},\mathbf{g})|^2(\bar{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{g},\sigma}-\bar{N}_{\mathbf{k}\sigma})\delta(E_{\mathbf{k}\sigma}-E_{\mathbf{k}-\mathbf{g},\sigma}-\varepsilon_{\mathbf{g}}).$$

Рассмотрим сначала спин-орбитальное взаимодействие. После преобразований, аналогичных тем, которые были проведены в предыдущем пункте, и введения переменных интегрирования

$$x=\frac{(\beta-2\sigma\beta')(ak)^2}{\varkappa T},\qquad y=\frac{J(ag)^2}{\varkappa T} \tag{12}$$

получим:

$$\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}} = \sum_{\sigma} B_\sigma \int \frac{x - p_\sigma(y)}{y\,(e^{y+u}-1)} \left(\frac{1}{e^{x-y-u-v_\sigma}+1} - \frac{1}{e^{x-v_\sigma}+1} \right) dx\,dy, \qquad (13)$$

где

$$B_\sigma = \frac{6{,}15\sqrt{\pi}(LW_0)^2 J^2}{\hbar\,(\beta - 2\sigma\beta')^3} \left(\frac{T}{T_{\text{К}}}\right)^{1/2};$$

$$v_\sigma = \frac{\varepsilon_0 - 2\sigma\,(\alpha' + \mathfrak{M}H')}{\varkappa T} = \frac{\varepsilon_\sigma}{\varkappa T};$$

$$u = \frac{2\mathfrak{M}H'}{\varkappa T};$$

$$p_\sigma(y) = \frac{1}{A_\sigma}\left(\frac{1+A_\sigma}{2}\right)^2 y + \frac{(1+A_\sigma)\,u}{2} + \frac{A_\sigma u^2}{4y}, \qquad \left(A_\sigma = \frac{J}{\beta - 2\sigma\beta'}\right).$$

Область интегрирования в (13) определяется неравенством $x \geqslant p_\sigma(y)$, т. е. представляет собой часть плоскости (x, y), ограниченную параболой $x = p_\sigma(y)$. Эту параболу оказалось возможным заменить с достаточной точностью двумя пересекающимися прямыми

$$y = \frac{A_\sigma u^2}{4v_\sigma} = l \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{A_\sigma}\left(\frac{1+A_\sigma}{2}\right)^2 y + \frac{(1+A_\sigma)\,u}{2} = by + h.$$

В этом приближении

$$\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}} \sum_{\sigma} B_\sigma \int_l^\infty \frac{dy}{y\,(e^{y+u}-1)} \int_{by+h}^\infty (x - by - h)\left(\frac{1}{e^{x-y-u-v_\sigma}+1} - \frac{1}{e^{x-v_\sigma}+1} \right) dx. \qquad (14)$$

Интегралы по x можно свести к интегралам вида

$$i(\eta) = \int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^{z-\eta}+1}.$$

Последний интеграл при выполнении условия $\eta \gg 1$, что имеет место в нашем случае, приближенно равен $\eta^2/2$. Используя это, вместо (14) находим:

$$\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}} = \sum_{\sigma} B_\sigma v_\sigma \int_l^\infty \frac{(y+u)\,dy}{y\,(e^{y+u}-1)}.$$

Если снова ограничиться случаем $2\mathfrak{M}H' \ll \varkappa T$ (т. е. $l \ll u \ll 1$), то, производя приближенную оценку этого интеграла, окончательно получим:

$$\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}} \approx \sum_{\sigma} \frac{6{,}15\sqrt{\pi}(LW_0)^2 \varepsilon_\sigma \varkappa T_{\text{К}}}{\hbar\,(\beta - 2\sigma\beta')^3} \left(\frac{T_{\text{К}}}{T}\right)^{1/2} \ln \frac{\varepsilon_\sigma \chi T}{A_\sigma (\mathfrak{M}H')^2}. \qquad (15)$$

Например, полагая снова $J \sim 10^{-13}$ эрг, $(\beta - 2\sigma\beta') \sim 10^{-13}$ эрг, $\varepsilon_\sigma \sim 10^{-12}$ эрг, при температуре $T = 10°\text{К}$ и $H' \sim 10^3$ Ое получим:

$$\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}} \sim 4 \cdot 10^{10}\ \text{сек}^{-1}.$$

Характерно, что $\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}}$, в отличие от $\overline{w}^{(0)}_{\text{с-э}}$, с повышением т-ры не увеличивается, а, наоборот, весьма медленно уменьшается.

Расчет $\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}}$ для случая спин-спинового взаимодействия s- и d-электронов проводится совершенно аналогичным образом и дает следующий результат:

$$\overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}} \approx \sum_{\sigma} \frac{0{,}7 \cdot R'^2\,(J\varkappa T)^{3/2}\varepsilon_\sigma}{\pi^{3/2}\hbar\,(\beta - 2\sigma\beta')^5}. \qquad (16)$$

Формула (16) даст очень малое значение для частоты спин-электронной релаксации по сравнению с (15) даже при наиболее благоприятной оценке входящего в нее параметра R'. Так, например, полагая $R' \sim 10^{-16}$ эрг, получим:

$$\bar{w}^{(1)}_{\text{с-э}} \sim 10^3 T^{3/2} \text{ сек}^{-1}.$$

Этот результат показывает, что процессы столкновения типа $\Delta m = \pm 1$ в основном обусловлены спин-орбитальным взаимодействием, по крайней мере в той области температур, для которой справедлив настоящий расчет.

4. Рассмотрим, наконец, процессы столкновения типа $\Delta m = \pm 2$. Соответствующее им кинетическое уравнение согласно ((I, 3.7), 3-я строка) имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\Delta N_g = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k}} |C^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{g})|^2 [(N_g+1)(1-N^+_{\mathbf{k}-g})N^-_{\mathbf{k}} - N_g(1-N^-_{\mathbf{k}})N^+_{\mathbf{k}-g}]\,\delta(E^-_{\mathbf{k}} - E^+_{\mathbf{k}-g} - \varepsilon_g), \quad (17)$$

где согласно (I, 3.36)

$$|C^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{g})|^2 = \frac{1}{N}(ak)^4 \sin^4\theta_{\mathbf{kg}}(R^2\cos^2 2\varphi_{\mathbf{k}} + R'^2 \sin^2 2\varphi_{\mathbf{k}}).$$

Из уравнения (17) находим снова среднюю частоту релаксации

$$\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}} = \Big(\sum_g \bar{N}_g\Big)^{-1}\frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{k},\,g} |C^{(2)}(\mathbf{k},\mathbf{g})|^2 \bar{N}_g(\bar{N}^+_{\mathbf{k}-g} - \bar{N}^-_{\mathbf{k}})\,\delta(E^+_{\mathbf{k}-g} - E^-_{\mathbf{k}} + \varepsilon_g). \quad (18)$$

Не представляет большого труда продолжить дальше строгие вычисления $\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}}$; они мало чем будут отличаться от соответствующих вычислений, проведенных в п. 2. Однако во избежание громоздких и в конечном итоге ненужных выкладок мы ограничимся доказательством того, что даже заведомо завышенное значение для $\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}}$ в данном случае будет пренебрежимо малым по сравнению с величиной $\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}$, обусловленной обменным электростатическим взаимодействием. Для этого в выражении (18) заменим множитель $\sin^4\theta_{\mathbf{kg}}$ его максимальным значением, равным единице, и при переходе к интегрированию будем пренебрегать ограничением области интегрирования, наложенным законами сохранения энергии и квази-импульса ($|\cos\theta_{\mathbf{kg}}| \leqslant 1$). Так как для всех значений $0 \leqslant k < \infty$ и $0 \leqslant g < \infty$ подинтегральная функция положительна, то это приводит только к увеличению интеграла.

В результате введения переменных интегрирования

$$x = \frac{\beta + \beta'(ak)^2 - \bar{\varepsilon}}{\varkappa T}, \qquad y = \frac{\varepsilon_g}{\varkappa T}$$

и после взятия интеграла по y, с учетом сказанного выше, имеем *

$$\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}} < \frac{(R^2+R'^2)J}{20{,}8\pi^{3/2}\hbar(\beta^2-\beta'^2)(\beta+\beta')^2}\Big(\frac{T}{T_{\text{К}}}\Big)^{1/2}\int_{-\bar{\varepsilon}/\varkappa T}^{\infty}\frac{(\bar{\varepsilon}+\varkappa T x)^2\ln(e^x+1)}{e^x+1}\,dx.$$

Последний интеграл приближенно равен $\frac{\pi^2}{4}\bar{\varepsilon}^2$. Окончательно получаем:

$$\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}} < \frac{\sqrt{\pi}(R^2+R'^2)J\bar{\varepsilon}^2}{83{,}2(\beta^2-\beta'^2)(\beta+\beta')^2\hbar}\Big(\frac{T}{T_{\text{К}}}\Big)^{1/2}. \quad (19)$$

* Не учитывая членов порядка $\frac{2\mathfrak{M}H'}{\varkappa T}$.

Учет ограничения области интегрирования, как и в случае $\bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}$, для температур $T \ll T_0$ приводит к появлению в правой части (19) множителя e^{-T/T_0}.

Из опытов по измерению анизотропии электросопротивления в ферромагнетиках следует, что разумным порядком величины для $R^2 + R'^2$ является 10^{-32} эрг^2. Принимая для остальных, входящих в (19) величин такие же значения, как и в пп. 2 и 3, находим:

$$\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}} < 10^6 \sqrt{T} \text{ сек}^{-1}. \tag{20}$$

Таким образом, из сравнения (20) и (10) видно, что действительно $\bar{w}^{(2)}_{\text{с-э}} \ll \bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}}$.

§ 3. Время спин-электронной релаксации

1. Из приведенных расчетов и оценок видно, что в рассматриваемой области температур $\frac{2\mathfrak{M}H'}{\varkappa} \ll T \ll T_{\text{К}}$ основное влияние на частоту спин-электронной релаксации имеют процессы типа $\Delta m = 0$, обусловленные в основном электростатическим обменным взаимодействием, и процессы типа $\Delta m = \pm 1$, обусловленные в основном магнитным спин-орбитальным взаимодействием. Полная частота спин-электронной релаксации может быть записана в виде суммы выражений (9) и (15), т. е.

$$\bar{w}_{\text{с-э}} = \bar{w}^{(0)}_{\text{с-э}} + \bar{w}^{(1)}_{\text{с-э}}. \tag{21}$$

Примечательным является то обстоятельство, что в этой сумме первый из членов при уменьшении температуры медленно уменьшается (примерно как $\sqrt{T}$), а второй, наоборот, медленно растет (примерно как $1/\sqrt{T}$), причем оба они имеют одинаковые порядки величин. Следовательно, полная величина $\bar{w}_{\text{с-э}}$ может для широкого интервала температур сохранять неизменное в пределах порядка величины значение, не меньшее 10^9 сек$^{-1}$.

Для сравнения укажем, что вычисленная А. И. Ахиезером частота спин-спиновой релаксации $\bar{w}_{\text{с-с}} \sim 10^7$ сек$^{-1}$ при температуре $T = 10°$ К и увеличивается пропорционально $(T/T_{\text{К}})^{1/2} \left(\ln \frac{\varkappa T}{2\mathfrak{M}H'}\right)^2$ с повышением температуры.

Таким образом, как будто бы можно сделать вывод, что $\bar{w}_{\text{с-э}} \gg \bar{w}_{\text{с-с}}$ и что, в отличие от ферродиэлектриков, в ферромагнитных металлах равновесие в системе ферромагнитных спинов устанавливается в основном не благодаря столкновениям ферромагнонов друг с другом, а благодаря столкновениям их с электронами проводимости. В этом случае время релаксации τ ферромагнитной системы определялось бы формулой

$$\frac{1}{\tau} = \bar{w}_{\text{с-э}}. \tag{22}$$

Однако такой вывод был бы преждевременным, так как при расчете $\bar{w}_{\text{с-с}}$ учитывалось только диполь-дипольное спин-спиновое взаимодействие и не учитывались взаимодействия, связанные с наличием орбитального движения d-электронов (спин-орбитальное, орбито-орбитальное и др.). Между тем нет никаких оснований считать, что эти типы магнитного взаимодействия дают такую же величину для частоты спин-спиновой релаксации как и диполь-дипольное. Известно, например, что в явлении ферромагнитной анизотропии основную роль играет не спин-спиновое взаимодействие между ферромагнитными электронами, а спин-орбитальное взаимодействие между ними. Повидимому, это взаимодей-

ствие играет определяющую роль и в процессах столкновения между ферромагнонами. Вполне возможно, что оно приводит к частоте спин-спиновой релаксации, не только сравнимой с частотой спин-электронной релаксации, но даже и большей ее.

2. Чтобы в какой-то мере учесть последнюю возможность, рассмотрим случай, когда $\overline{w}_{\text{с-с}} \gg \overline{w}_{\text{с-э}}$. В этом случае $\frac{1}{\tau} \approx \overline{w}_{\text{с-с}}$, и так как равновесие внутри самой подсистемы ферромагнонов устанавливается значительно быстрее, чем между нею и электронами проводимости, то имеет смысл ввести понятие температуры ферромагнонного газа T_{Φ}, отличной от температуры электронов проводимости T.

Для описания процесса установления теплового равновесия между этими двумя подсистемами можно теперь ввести еще одно характеристическое время, а именно время спин-электронной релаксации $\tau_{\text{с-э}}$, которое мы определим по аналогии с временем спин-решеточной релаксации [1] при помощи соотношения

$$\frac{d\,(T_{\Phi} - T)}{dt} = -\frac{T_{\Phi} - T}{\tau_{\text{с-э}}}\,. \tag{23}$$

Если обозначить теплоемкости подсистемы ферромагнонов и подсистемы электронов проводимости соответственно через C_{Φ} и $C_{\text{э}}$, то, согласно равенствам

$$-dQ = C_{\Phi} dT_{\Phi} \quad \text{и} \quad dQ = C_{\text{э}} dT, \tag{23'}$$

имеем для количества теплоты, передаваемого ферромагнонами электронам, следующее выражение:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{\tau_{\text{с-э}}}\,\Delta T, \tag{24}$$

где

$$\Delta T = T_{\Phi} - T, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_{\Phi}} + \frac{1}{C_{\text{э}}}\,.$$

Таким образом, для определения $\tau_{\text{с-э}}$ необходимо найти величину $\frac{dQ}{dt}$, которая в первом приближении (при малых ΔT), очевидно, пропорциональна ΔT, т. е.

$$\frac{dQ}{dt} = D\Delta T, \tag{25}$$

где коэффициент пропорциональности D можно назвать «коэффициентом теплопередачи» между системой ферромагнонов и электронной системой Если величина D известна, то, согласно (24) и (25),

$$\tau_{\text{с-э}} = \frac{C}{D}\,. \tag{26}$$

3. Обмен энергией между ферромагнитной спин-системой и электронной системой происходит благодаря поглощению и испусканию ферромагнонов электронами проводимости. За единицу времени спин-система передает электронной системе энергию, равную

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{\mathbf{g}} \varepsilon_{\mathbf{g}} \frac{dN_{\mathbf{g}}}{dt}\,. \tag{27}$$

Так как наиболее вероятными процессами поглощения и испускания ферромагнонов электронами проводимости при низких температурах являются процессы типа $\Delta m = \pm 1$, обусловленные в основном спин-орбитальным взаимодействием, то для нахождения $\frac{dN_{\mathbf{g}}}{dt}$ необходимо воспользоваться выражением (11), в котором величина $C_{-}^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{g})$ должна принимать значение (I, 3.38). В результате вместо (27) после замены сумми-

рования интегрированием получим:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{16N(LW_0)^2}{\pi\hbar}\sum_\sigma \int \varepsilon_g \sin^3\theta_{kg}\,[(N_g+1)\,N_{k\sigma}(1-N_{k-g,\sigma}) - $$
$$- N_g N_{k-g,\sigma}(1-N_{k\sigma})]\,(ak)^4\delta(E_{k\sigma}-E_{k-g,\sigma}-\varepsilon_g)\,d(ak)\,d(ag)\,d\theta_{kg}.$$

В этом уравнении, в соответствии с принятым предположением ($\overline{w}_{с\text{-}с} \gg \overline{w}_{с\text{-}э}$), в качестве $N_{k\sigma}$ и N_g необходимо брать их равновесные значения $\overline{N}_{k\sigma}$ и $\overline{N}_g$, отнесенные соответственно к температурам T и $T+\Delta T$, предполагая, что по сравнению с электронной системой спин-система «нагрета» на ΔT градусов.

Учитывая это, произведем разложение $\overline{N}_g$ в ряд по степеням ΔT, обрывая его на линейном члене. Из сравнения полученного выражения с (26) тогда сразу определяется «коэффициент теплопередачи» D:

$$D = \frac{16N(LW_0)^2}{\pi\hbar\varkappa T^2}\sum_\sigma \int \frac{\varepsilon_g^2\, e^{\varepsilon_g/\varkappa T}\,(\overline{N}_{k-g,\sigma}-\overline{N}_{k\sigma})\sin^3\theta_{kg}}{(e^{\varepsilon_g/\varkappa T}-1)^2} \times$$
$$\times\,(ak)^4\,\delta(E_{k\delta}-E_{k-g,\sigma}-\varepsilon_g)\,d(ak)\,d(ag)\,d\theta_{kg}. \qquad (28)$$

В используемых здесь выражениях для энергии ферромагнона ε_g (I,3.26) и электрона проводимости $E_{k\sigma}$ (I,3.32) можно положить $H'=0$, так как учет внешнего магнитного поля H (или H') в данном случае, при выполнении условия $2\mathfrak{M}H' \ll \varkappa T$, вносит лишь несущественную поправку.

Интегрирование по θ_{kg} в (28) снова можно снять при помощи δ-функции. Если затем сделать замену переменных (12), то оставшиеся интегралы берутся также весьма просто.

Окончательно для «коэффициента теплопередачи» имеем:

$$D = \sum_\sigma \frac{N(LW_0)^2\varepsilon_\sigma \varkappa^2 T}{3\hbar(\beta-2\sigma\beta')^3}. \qquad (29)$$

При тех же оценках входящих в эту формулу величин, как и в § 2, получим:

$$D \approx 10^{-12}\,NT \text{ эрг град}^{-1}\text{ сек}^{-1}. \qquad (30)$$

4. Для определения времени спин-электронной релаксации $\tau_{с\text{-}э}$ согласно (26) необходимо знать теплоемкости ферромагнонной и электронной подсистем. Теплоемкость ферромагнонов, как известно [1], равна

$$C_ф = \frac{15\sqrt{\pi}}{8(2\pi)^2}\,\varkappa N\left(\frac{T}{T_K}\right)^{3/2} \approx 10^{-21}\,NT^{3/2} \text{ эрг град}^{-1}, \qquad (31)$$

а для электронной теплоемкости возьмем экспериментальное значение, полученное для никеля Кеезомом и Кларком [9],

$$C_э = 8{,}72\cdot 10^{-4}\,N\varkappa T \approx 10^{-19}NT \text{ эрг град}^{-1}. \qquad (31')$$

Таким образом, в рассматриваемой области температур $C_э \gg C_ф$, и поэтому температуру электронов проводимости T можно считать постоянной, равной температуре решетки, полагая $C = C_ф$.

Следовательно, время спин-электронной релаксации, согласно (26), (30) и (31), равно

$$\tau_{с\text{-}э} \approx 10^{-9}\sqrt{T} \text{ сек}. \qquad (32)$$

Заметим, что $\tau_{с\text{-}э}$ на несколько порядков величины меньше, чем время спин-решеточной релаксации $\tau_{с\text{-}р}$, вычисленное Ахиезером [1]. Кроме того, $\tau_{с\text{-}э}$ убывает при понижении температуры, а $\tau_{с\text{-}р}$ очень быстро растет $\left(\tau_{с\text{-}р} \sim \frac{1}{T}\,e^{\text{const}/T}\right)$. Следовательно, можно ожидать, что

в тех явлениях, в которых проявляется спин-решеточная релаксация, ферромагнитные металлы и неметаллы (например ферриты) будут вести себя по-разному.

§ 4. О ширине линии ферромагнитного резонансного поглощения

1. Рассмотренный механизм спин-электронной релаксации может служить одной из причин уширения линии ферромагнитного резонансного поглощения в металлах [10]. Так как удовлетворительной теории уширения линии до сих пор нет, то представляет интерес оценить то влияние, которое могла бы иметь на величину ширины линии одна спин-электронная релаксация, если пренебречь другими механизмами затухания.

Основные опытные факты, которые должна объяснить теория, это: 1) большая величина ширины линии $\Delta\omega \sim 10^9 - 10^{10}$ сек$^{-1}$ и 2) независимость ее от температуры в пределах порядка величины в области комнатных температур и ниже.

Если отождествить $\Delta\omega$ с полной средней частотой спин-электронной релаксации $\overline{w}_{\text{с-э}} = \overline{w}^{(0)}_{\text{с-э}} + \overline{w}^{(1)}_{\text{с-э}}$, то между этими фактами и теоретическими выводами имеется определенное согласие как в отношении порядка величины, так и в отношении слабой температурной зависимости.

Вряд ли имеет смысл проводить более детальное сравнение с опытом, так как наши расчеты, строго говоря, справедливы только для температур, значительно ниже точки Кюри, а имеющиеся экспериментальные данные [11] в основном ограничиваются только областью комнатных температур и выше.

Хотя по произведенной нами оценке спин-электронная релаксация вполне может обеспечить наблюдаемую ширину линии в металлах, мы не берем, однако, на себя смелость утверждать, что этот механизм релаксации является определяющей причиной уширения, так как тогда трудно было бы объяснить, чем обусловлено такое же уширение линии в неметаллических ферромагнетиках.

Кроме того, в отношении примененного нами метода расчета частоты релаксации (путем усреднения по всем состояниям ферромагнонов) остается в силе замечание Полдера [12], согласно которому истинная частота релаксации для спиновых волн, играющих роль в резонансном поглощении, значительно меньше, чем обычно вычисляемая — средняя.

И все же, повидимому, нет оснований сомневаться в том, что спин-электронная релаксация может иметь существенное влияние на ширину линии, которое в особенности необходимо учитывать при исследовании тех закономерностей для ширины линии, которые отличают металлический ферромагнетик от неметаллического.

В настоящее время нет еще никаких экспериментальных данных, которые бы свидетельствовали о существенных различиях в величине ширины линии в металлических и неметаллических ферромагнетиках. Однако из данных работы [11] следует, что имеется некоторое отличие в температурном поведении ширины линии выше комнатной температуры для ферритов и ферромагнитных металлов. Если для ферритов ширина линии с повышением температуры остается постоянной, то для супермаллоя и никеля наблюдается рост ее, сначала медленный, а затем, ближе к точке Кюри, более быстрый. Этот факт не противоречит нашим результатам, так как он согласуется с соответствующим увеличением частоты спин-электронной релаксации для процессов типа $\Delta m = 0$, в особенности если при расчете $\overline{w}^{(0)}_{\text{с-э}}$ учесть члены следующего порядка относительно $T/T_{\text{к}}$.

2. Для окончательного решения вопроса о механизме уширения линии ферромагнитного резонансного поглощения существенно необходимо

провести систематические измерения ширины линии как в металлических, так и в неметаллических ферромагнетиках в широкой области низких температур. Со стороны теории требуется обобщить расчеты частоты спин, спиновой релаксации с последовательным учетом тех взаимодействий, которые связаны с орбитальным движением ферромагнитных электронов.

Выводы

1. На основе *s-d*-обменной модели ферромагнитных металлов мы рассчитали средние вероятности (частоты релаксации), соответствующие различным типам процессов столкновения ферромагнонов с электронами проводимости. При этом оказалось, что наиболее существенное влияние на частоту спин-электронной релаксации имеют процессы двух типов — процессы поглощения и испускания ферромагнонов электронами проводимости без изменения полного магнитного квантового числа системы и процессы поглощения и испускания ферромагнонов электронами проводимости, сопровождающиеся изменением полного магнитного квантового числа системы на единицу. Первые из этих процессов в основном обусловлены обменным электростатическим, а вторые — магнитным спин-орбитальным взаимодействиями. Частота релаксации, соответствующая процессам первого типа, приближенно прямо пропорциональна, а процессам второго типа — приближенно обратно пропорциональна $\sqrt{T}$, и обе они имеют примерно одинаковый порядок величины 10^9—10^{10} сек$^{-1}$.

2. В предположении, что равновесие внутри самой подсистемы ферромагнонов устанавливается значительно скорее, чем между нею и подсистемой электронов проводимости, мы рассчитали время установления теплового равновесия между этими двумя подсистемами. Это время по порядку величины равно $10^{-9}\sqrt{T}$ сек.

3. Результаты расчета средней частоты спин-электронной релаксации мы использовали для обсуждения вопроса о роли столкновений ферромагнонов с электронами проводимости в уширении линии ферромагнитного резонансного поглощения. Связанная с этим механизмом релаксации ширина линии удовлетворительно согласуется с основными опытными данными как в отношении порядка величины, так и в отношении слабой температурной зависимости. Можно с уверенностью сделать вывод, что спин-электронная релаксация является одной из существенных причин, влияющих на наблюдаемую ширину линии в ферромагнитных металлах.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность С. В. Вонсовскому за предложение темы настоящей работы и постоянное руководство при ее выполнении.

Институт физики металлов
Уральского филиала
Академии наук СССР

Цитированная литература

1. Ахиезер А. И., Sow. Phys., **10**, 217 (1946).
2. Вонсовский С. В., Туров Е. А., ЖЭТФ, **24**, 419 (1953).
3. Вонсовский С. В., см. настоящий номер журнала, стр. 447.
4. Туров Е. А., ДАН СССР, **98**, 945 (1954).
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика.— ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
6. Bloembergen N., Phys. Rev., **78**, 572 (1950).
7. Зинер К., в Сб. «Проблемы современной физики», V — Ферромагнетизм, стр. 33.— ИЛ, М., 1952.
8. Туров Е. А., ЖЭТФ, **25**, 352 (1953).
9. Зейтц Ф., Современная теория твердого тела.— ГИТТЛ, М.— Л., 1949.
10. Туров Е. А., Вонсовский С. В., ЖЭТФ, **24**, 501 (1953).
11. Bloembergen N., Wang S., Phys. Rev., **93**, 72 (1954).
12. Polder D., Phil. Mag., **40**, 99 (1949).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т. XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

Е. А. ТУРОВ

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1. Принято считать, что в обычных (неферромагнитных) металлах электросопротивление обусловлено столкновениями электронов проводимости с колебаниями решетки (фононами). Благодаря действию двух конкурирующих эффектов — ускорения внешним электрическим полем и торможения при столкновении с фононами — электронная система приходит в стационарное токовое состояние. При этом процессы столкновения электронов с фононами обусловливают вполне определенную температурную зависимость электросопротивления при низких температурах в виде «закона T^5» (электросопротивление $\rho \sim T^5$).

Существование ферромагнонной ветви спектра в ферромагнетиках создает дополнительный «резервуар», в который может переходить энергия электронов проводимости, ускоряемых электрическим полем. Так как законы дисперсии для энергии ферромагнонов и для вероятности столкновений с ферромагнонами другие, чем для фононов, то, вообще говоря, следует ожидать, что спин-электронная релаксация будет приводить к дополнительному электросопротивлению ферромагнетиков, с другой температурной зависимостью, чем «закон T^5».

Вполне возможно, что в некотором интервале температур «ферромагнонная» часть электросопротивления будет даже преобладать над «фононной» частью.

Эти соображения о добавочном электросопротивлении ферромагнитных металлов при низких температурах были впервые высказаны С. В. Вонсовским в 1948 г. [1]. При определенных предположениях о механизме столкновений он получил для электросопротивления, специфичного для ферромагнетиков, закон T^3.

Вторая попытка расчета добавочного сопротивления в ферромагнетиках принадлежит А. Г. Самойловичу и В. А. Яковлеву [2], которые вычислили «время свободного пробега» для столкновений электронов проводимости с ферромагнонами, обусловленных спин-орбитальным взаимодействием s- и d-электронов *. Однако некритическое применение авторами [2] понятия «времени свободного пробега», которое при низких температурах не имеет определенного однозначного смысла, привело их к ошибочному результату **. Кроме того, в этой работе авторы применяют весьма сомнительный метод «обрезания» нижнего предела интегрирования по квази-импульсу ферромагнона, в результате чего «время свободного пробега» оказалось зависящим существенным образом от объема кристалла. Авторы работы [2] получили для добавочного электросопротивления закон пропорциональности T^2.

В настоящее время, после развития математического аппарата s-d-обменной модели ферромагнитного металла, произведенного в работах [5, 6, 3], появилась возможность более детально и строго исследовать вопрос об электросопротивлении, обусловленном столкновениями элек-

* См. [3] и [4].

** В чем заключается эта ошибка, будет видно ниже.

тронов проводимости с ферромагнонами. Это и составляет цель настоящей работы.

2. Мы будем интересоваться такими процессами соударений между электронами проводимости и ферромагнонами, которые сопровождаются изменением числа ферромагнонов в системе («испускание» и «поглощение» ферромагнонов электронами проводимости).

Как было показано нами в предыдущей работе [4], среди этих процессов наиболее вероятными являются процессы типа $\Delta m = 0$ и процессы типа $\Delta m = \pm 1$ (Δm — изменение магнитного квантового числа системы в индивидуальном акте столкновения между квази-частицами). Первые из них в основном обусловлены обменным электростатическим, а вторые — магнитным спин-орбитальным взаимодействием между внешними и внутренними электронами ферромагнетика. Соответствующие этим процессам амплитуды вероятностей переходов вычислены в работе [3] *.

Как и в работе [3], мы ограничимся рассмотрением области низких температур, в которой $T \ll T_к$ ($T_к$ — точка Кюри) и, с другой стороны, $T \gg \frac{\overline{W}_0}{\varkappa}$, где $\overline{W}_0 \approx \frac{\mathfrak{M}^2}{a^3}$ — величина порядка энергии магнитного дипольного взаимодействия между магнитными спиновыми моментами соседних атомов кристаллической решетки. В этой области температур энергию ферромагнона с квази-импульсом g согласно формуле (I, 3.26) можно представить в виде:

$$\varepsilon_g = \tilde{J}(ag)^2 + W_0, \tag{1}$$

где J — d-d-обменный интеграл, a — постоянная решетки.

Используя выражение (I, 3.7) для части оператора энергии, описывающей процессы столкновения электронов проводимости с ферромагнонами, а также формулы (I, 3.34), (I, 3.38), (I, 3.32) и (1), можно составить и решить кинетическое уравнение, определяющее изменение функции распределения электронов проводимости по квази-импульсам под влиянием электрического поля и соударений того или иного типа. Знание последней функции позволяет вычислить стандартным способом электросопротивление, связанное с процессами столкновений каждого типа.

3. Качественный ход температурной зависимости электросопротивления, обусловленного тем или иным конкретным механизмом столкновений электронов проводимости с ферромагнонами, можно получить, не решая кинетического уравнения, из весьма общих физических соображений. Производя некоторое обобщение обычных рассуждений, применяемых для качественного вывода «закона T^5» для электропроводности при низких температурах [7], это можно сделать следующим образом.

Если бы электрон проводимости отдавал при каждом столкновении с ферромагнонами (или фононами) весь свой импульс, приобретенный под действием электрического поля, то электросопротивление было бы прямо пропорционально полному числу таких соударений, т. е. интегралу

$$\int \overline{N}_g w(g)\, \delta(E_{k\sigma} - E_{k-g,\,\sigma'} - \varepsilon_g)\, dg, \tag{2}$$

где $\overline{N}_g$ — среднее число ферромагнонов (фононов), обладающих импульсом g (функция распределения Бозе); $w(g)\, \delta(E_{k\sigma} - E_{k-g,\,\sigma'} - \varepsilon_g)$ — вероятность элементарного акта столкновения, при котором электрон теряет энергию $E_{k\sigma} - E_{k-g,\,\sigma'} = \varepsilon_g$ и импульс g, причем первый множитель — $w(g)$ — в этом произведении представляет собой квадрат модуля матричного элемента, соответствующего данному квантовому переходу, а второй множитель

* В дальнейшем нам приходится ссылаться на формулы этой статьи; при этих ссылках формулы будут цитироваться под своими номерами с добавлением перед номером формулы римской цифры I.

(δ-функция) обеспечивает выполнение законов сохранения энергии и импульса. Однако при низких температурах процесс передачи импульса является «медленным процессом» («диффузия в пространстве импульсов»), причем при каждом соударении составляющая импульса в направлении поля изменяется на величину, прямо пропорциональную g^2[8]. Поэтому подинтегральное выражение в формуле (2) следует еще разделить на число соударений, за которое электрон проводимости теряет весь свой импульс, направленный вдоль поля. Это число будет, очевидно, обратно пропорционально g^2.

Другими словами, электросопротивление ρ должно быть прямо пропорционально числу, показывающему, сколько раз в течение 1 сек может уничтожаться в результате столкновений весь импульс электрона, направленный вдоль поля, т. е.

$$\rho = \int \overline{N}_g w(\mathbf{g})\, \delta(E_{\mathbf{k}\sigma} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{g},\,\sigma'} - \varepsilon_g)\, g^2\, dg, \tag{3}$$

где интегрирование проводится по всему пространству импульсов $\mathbf{g}$.

Если пренебречь разницей в энергиях электрона проводимости в состояниях с различными направлениями спинов, т. е. полагать, что $E_{\mathbf{k}\sigma} \approx E_{\mathbf{k}\sigma'} = E_{\mathbf{k}}$, а также считать, что $E_{\mathbf{k}}$ зависит только от $|\mathbf{k}| \equiv k$, то имеет место приближенное равенство:

$$E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} \approx \frac{dE_{\mathbf{k}}}{dk}\, g \left(\cos\theta_{\mathbf{kg}} - \frac{g}{2k}\right), \tag{4}$$

где $\theta_{\mathbf{kg}}$ — полярный угол вектора $\mathbf{g}$, отсчитываемый от направления вектора $\mathbf{k}$.

После перехода к сферическим координатам и проведения интегрирования по углам с учетом (4) выражение (3) примет вид:

$$\rho = C \int \overline{N}_g\, w(\mathbf{g})\, (ag)^3\, d(ag) = C \int \frac{w(g)\,(ag)^3\, d(ag)}{\exp(\varepsilon_g / \varkappa T) - 1}, \tag{5}$$

(C — константа, не зависящая от температуры), причем в подинтегральной функции необходимо произвести подстановку*

$$\cos\theta_{\mathbf{kg}} = \frac{g}{2k} + \frac{\varepsilon_g}{g\,(dE_{\mathbf{k}}/dk)}. \tag{6}$$

Используя общую формулу (5) с учетом (6), можно определить вид температурной зависимости электросопротивления металла для того или иного конкретного механизма столкновений электронов проводимости с бозевскими квази-частицами (фононами или ферромагнонами). При этом оказывается возможным оценить и относительный вклад, даваемый каждым из механизмов столкновения.

4. Прежде всего получим из (5) «закон T^5» для электросопротивления ρ_{pm}, обусловленного столкновениями электронов проводимости с фононами. В этом случае

$$\varepsilon_g = \varkappa T_{\mathrm{D}} \frac{g}{g_0}, \tag{7}$$

$$w(\mathbf{g}) = \frac{2\overline{\mathscr{E}}^2 \hbar^2 g_0 g}{9 M \varkappa T_{\mathrm{D}}}, \tag{8}$$

где T_{D} — температура Дебая; g_0 для простой кубической решетки с

* При этом условие $|\cos\theta_{\mathbf{kg}}| \leqslant 1$, вообще говоря, должно ограничивать область интегрирования по $\mathbf{g}$.

постоянной a равно: $g_0 = \sqrt[3]{6\pi^2}/a$; $\overline{\mathcal{E}}$ — средняя кинетическая энергия электрона проводимости, равная по порядку величины предельной энергии Ферми, M — масса атома металла. Следовательно,

$$\rho_{\text{рш}} = \frac{2C\overline{\mathcal{E}}^2\hbar^2 g_0}{9M\varkappa T_{\text{D}} a}\int_0^\infty \frac{(ag)^4\, d\,(ag)}{\exp\,(\varepsilon_g/\varkappa T)-1}\,.$$

Последнее выражение после замены переменной интегрирования

$$\varepsilon_g/\varkappa T = y \tag{9}$$

и взятия табличного интеграла принимает вид:

$$\rho_{\text{рш}} \approx C\,\frac{10^2\pi^4\overline{\mathcal{E}}^2\hbar^2}{Ma^2\varkappa T_{\text{D}}}\left(\frac{T}{T_{\text{D}}}\right)^5. \tag{10}$$

5. Рассмотрим теперь процессы столкновения электронов проводимости с ферромагнонами.

Для процессов типа $\Delta m = 0$, обусловленных обменным электростатическим взаимодействием, согласно (I, 3.34),

$$w\,(\mathbf{g}) \approx |\,2\,(\alpha' - \lambda\beta')\,|^2,^*$$

и, следовательно,

$$\rho_0 = 2C\,(\alpha' - \lambda\beta')^2 \int \frac{(ag)^2\, d\,(ag)^2}{\exp\,(\varepsilon_g/\varkappa T)-1}\,.$$

Здесь постоянный член W_0 в выражении (1) для энергии ε_g вносит в ρ_0 лишь несущественную поправку порядка $\frac{W_0}{\varkappa T} \ll 1$, поэтому в первом приближении можно положить $W_0 = 0$ и после замены (9) производить интегрирование в пределах от 0 до ∞. В результате имеем

$$\rho_0 \approx C\,\frac{\pi^2}{3}\,(\alpha' - \lambda\beta')^2\left(\frac{T}{T_{\text{к}}}\right)^2. \tag{11}$$

Заметим, что в данном случае, вообще говоря, следовало бы учитывать зависимость энергии электрона проводимости от ориентации спина σ (см. (I, 3.32)). Это привело бы к появлению в (11) множителя вида $\exp\left(-\frac{T_0}{T}\right)$, где $T_0 \approx \left(\frac{\alpha'}{\varepsilon}\right)^2 \lambda T_{\text{к}}$. Однако при условии слабой поляризации электронов проводимости $(\alpha'/\varepsilon \ll 1)$ в рассматриваемой области температур $T \gg T_0$, и, следовательно, упомянутый множитель близок к единице.

6. Для процессов столкновения типа $\Delta m = \pm 1$, обусловленных магнитным спин-орбитальным взаимодействием между s- и d-электронами, согласно (I, 3.38),

$$w\,(\mathbf{g}) = \frac{(8\pi L W_0 k \sin\theta_{\text{kg}})^2}{Ng^2}\,. \tag{12}$$

Как показывает непосредственный расчет, основной вклад в электросопротивление, обусловленное столкновениями этого типа, дает выражение, получающееся из (5) с учетом (1) и (12), если принять, что $\cos\theta_{\text{kg}} \sim 0$ (т. е. заменить $\sin^2\theta_{\text{kg}}$ на единицу). Это, согласно (6), имеет

---

* Здесь мы все функции квази-импульса электрона проводимости берем для их значений на границе Ферми.

место в области температур $\frac{W_0}{\varkappa} \ll T \ll T_к$. В этом приближении после замены переменной интегрирования (9) получаем*:

$$\rho_1 \approx C \frac{(8\pi L W_0)^2 \lambda T}{2NT_к} \int\limits_{W_0/\varkappa T}^{\infty} \frac{dy}{e^y - 1} \approx C \frac{\lambda (8\pi L W_0)^2 T}{2NT_к} \ln \frac{\varkappa T}{W_0}. \qquad (13)$$

Заметим ,что в случае магнитного дипольного взаимодействия процессы столкновений $\Delta m = \pm 1$ дают добавочное электросопротивление, прямо пропорциональное T^3. Таким образом, первоначальные расчеты С. В. Вонсовского [1] относятся именно к этому случаю.

7. Более строгие расчеты электросопротивления ферромагнитных металлов путем решения соответствующих кинетических уравнений для каждого из механизмов столкновения дают результаты, совершенно аналогичные приведенным выше **. При этом, однако, оказывается, что постоянные коэффициенты C для различных процессов разные, а именно, между ними существует такое же соотношение, как между степенями температурной зависимости электросопротивления для соответствующих процессов. Например, для $\rho_{рш}(\sim T^5)$ константа C в пять раз больше, чем для $\rho_1(\sim T)$, а для $\rho_0(\sim T^2)$ — в два раза больше, чем для ρ_1. Поэтому при использовании формулы (5) для определения относительного вклада в электросопротивление, даваемого различными механизмами столкновения, необходимо снабдить ее множителем p, который принимает значения, равные степени температурной зависимости электросопротивления, соответствующего рассматриваемому типу столкновений ***.

8. Из вида температурной зависимости добавочного сопротивления ферромагнитных металлов (11) и (13), обусловленного столкновениями электронов проводимости с ферромагнонами, следует, что при достаточно низких температурах эта часть электросопротивления будет преобладать над обычным «фононным» электросопротивлением, для которого имеет место «закон T^5». Необходимо, однако, выяснить, является ли та критическая температура, ниже которой «ферромагнонная» часть электросопротивления становится заметной, еще достаточно высокой, чтобы эта особенность ферромагнитного металла представляла практический интерес для экспериментального исследования.

С этой целью попытаемся произвести хотя бы самое грубое количественное сравнение «ферромагнонной» и «фононной» частей электросопротивления, а также оценим относительный вклад, даваемый процессами типа $\Delta m = 0$ и процессами типа $\Delta m = \pm 1$.

---

* Ошибка, допущенная в работе [2], фактически сводится к следующему: авторы учли множитель g^2, отличающий подинтегральные выражения (2) и (3), лишь после вычисления интеграла типа (2), положив $g^2 \sim T$. Вследствие этого вместо интеграла, входящего в (13), они получили интеграл вида

$$\int\limits_{\text{const}/T} \frac{dy}{y(e^y - 1)} \sim T,$$

что и привело к закону $\rho_1 \sim T^2$.

** Решение кинетического уравнения для процессов типа $\Delta m = 0$ было произведено А. А. Бердышевым [9].

*** Последнее математически обусловлено тем, что указанный выше приближенный метод оценки температурной зависимости электросопротивления, в частности, приводит к замене интегралов типа $I_p = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})}$ интегралами $I_1 = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{e^x - 1}$, которые, как легко видеть, связаны соотношением $I_p = pI_1$ (для $p \geqslant 2$ точно, а для $p = 1$ — с учетом ограничения области интегрирования, накладываемого неравенством $|\cos\theta_{kg}| \leqslant 1$, и при условии $\varkappa T \gg W_0$ — приближенно).

Учитывая замечание, приведенное в п. 7, и формулы (10), (11) и (13), находим

$$\frac{\rho_0}{\rho_{рш}} = \frac{(\alpha' - \lambda\beta')^2 M a^2 \varkappa T_D^6}{750\pi^2 \overline{\mathscr{E}}^2 \hbar^2 T_к^2 T^3}, \tag{14}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{рш}} = \frac{8\lambda (LW_0)^2 M a^2 \varkappa T_D^6}{125\pi^2 \overline{\mathscr{E}}^2 \hbar^2 T_к T^4} \ln \frac{\varkappa T}{W_0}, \tag{15}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{48\lambda (LW_0)^2 T_к}{(\alpha' - \lambda\beta')^2 T} \ln \frac{\varkappa T}{W_0}. \tag{16}$$

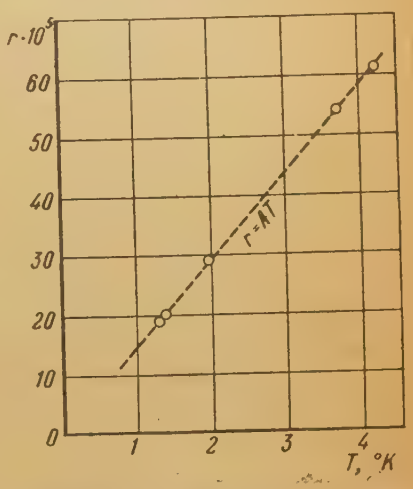
Полагая, например, $M \sim 10^{-22}$ г, $T_D \sim 500°$ К (железо), $T_к \sim 10^{3°}$ К, $a^2 \sim 10^{-15}$ см^2, $\overline{\mathscr{E}} \sim 10^{-12}$ эрг, $(\alpha' - \lambda\beta') \sim 10^{-14}$ эрг и $LW_0 \sim 10^{-17}$ эрг, вместо (14) — (16) имеем:

$$\rho_0 / \rho_{рш} \sim \frac{10^3}{T^3}, \quad \rho_1 / \rho_{рш} \sim \frac{10^3}{T^4} \ln (10T), \quad \rho_1 / \rho_0 \sim \frac{\ln (10T)}{T}.$$

Эти результаты показывают, что специфичное для ферромагнитных металлов электросопротивление при температурах порядка нескольких градусов Кельвина не только становится сравнимым с обычным «фононным» электросопротивлением, но может даже значительно превзойти его.

Произведенные количественные оценки, ввиду их явной грубости, не могут, конечно, служить убедительным доказательством того, что эффект дополнительного электросопротивления ферромагнетиков всегда должен проявляться в той области низких температур, которая достаточно хорошо освоена экспериментально (например в области гелиевых температур). Однако они все же дают некоторые основания надеяться, что, по крайней мере, в отдельных ферромагнитных металлах этот эффект может быть обнаружен на опыте.

Поэтому с целью проверки настоящего вывода, предсказывающего наличие особенностей в температурном поведении электросопротивления ферромагнетиков, было бы весьма желательным проведение систематических измерений электросопротивления как для ферромагнитных, так и для не ферромагнитных металлов в области глубоких низких температур.



Зависимость электросопротивления железа (образец № 10) от температуры в области гелиевых температур по данным [10] в пересчете на чистый металл. Точки — получены из экспериментальных данных, R_0 — сопротивление при 0° С, $r = R/R_0$

9. Единственной, известной нам, экспериментальной работой, из которой можно почерпнуть некоторые сведения о температурной зависимости электросопротивления ферромагнетиков (а именно, железа) в области гелиевых температур, является работа Майснера и Фохта [10]. На рисунке по данным этой работы, представлено электросопротивление железа для одного из образцов * в интервале температур 1,29 ÷ 4,21° К, пересчитанное на случай чистого металла (т. е. остаточное сопротивление исключено). Из графика видно, что в указанной области температур эти экспе-

* Мы выбрали для примера образец № 10, так как для него результаты сравнительно с другими образцами являются более точными.

риментальные результаты хорошо согласуются с температурной зависимостью той части электросопротивления ферромагнетика, которая обусловлена процессами типа $\Delta m = \pm 1$ (спин-орбитальное взаимодействие, формула (13)).

Этот факт еще раз свидетельствует о том, что проведение экспериментальных исследований в этой области представляет несомненный интерес, хотя само по себе оно еще далеко не является достаточным основанием для того, чтобы делать вывод о наличии предсказываемого теорией добавочного электросопротивления, специфичного для ферромагнетиков.

10. Представляет интерес заметить, что ферромагнитная спин-система может быть возбуждена («нагрета») независимо от решетки не тепловым, а магнитным способом, например при ферромагнитном резонансе.

Известно, что при достаточно больших мощностях микроволнового резонансного поля наступает явление так называемого насыщения ферромагнитного резонансного поглощения, экспериментально проявляющееся, в частности, в уменьшении продольной составляющей намагниченности с увеличением напряженности микроволнового магнитного поля [11]. Происходящее при этом увеличение числа ферромагнонов по сравнению с равновесным числом, соответствующим данной температуре, должно, очевидно, приводить к увеличению «ферромагнонной» части электросопротивления образца в момент облучения его микроволновым резонансным полем. Вполне возможно, что указанное явление может дать простой и эффективный способ обнаружения электросопротивления ферромагнитных металлов, обусловленного столкновением электронов проводимости с ферромагнонами.

Выводы

1. Ферромагнитные металлы, в силу наличия в них ферромагнонной ветви спектра, должны обладать специфичным для ферромагнетиков добавочным электросопротивлением, обусловленным процессами соударения электронов проводимости с ферромагнонами.

2. Это добавочное электросопротивление, имеющее температурную зависимость вида $\rho \sim C_1 T + C_2 T^2$, при достаточно низких температурах (возможно, в области гелиевых температур) может превзойти по величине обычное, «решеточное» электросопротивление, пропорциональное T^5.

Имеется возможность выделения ферромагнонной части электросопротивления путем нетермического возбуждения ферромагнитной спин-системы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. В. Вонсовскому за постоянный интерес и внимание к работе.

Институт физики металлов
Уральского филиала
Академии наук СССР

Цитированная литература

1. Вонсовский С. В., ЖЭТФ, 18, 219 (1948).
2. Самойлович А. Г., Яковлев В. А., ЖЭТФ, 22, 350 (1952).
3. Вонсовский С. В., см. настоящий номер журнала, стр. 447.
4. Туров Е. А., см. настоящий номер журнала, стр. 462.
5. Вонсовский С. В., Туров Е. А., ЖЭТФ, 24, 419 (1953).
6. Туров Е. А., ДАН СССР, 98, 6, 945 (1954).
7. Бете Г., Зоммерфельд А., Электронная теория металлов.— ОНТИ, М.— Л., 1938.
8. Гуревич Л. Э., Основы физической кинетики.— ГИТТЛ. М.— Л., 1940.
9. Бердышев А. А., Кандидатская диссертация, Свердловск, УрГУ, 1954.
10. Maissner W., Voigt B., Ann. d. Phys., (5), 7, 892 (1930).
11. Bloembergen N., Wang S., Phys. Rev., 93, 72 (1954).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

XIX, № 4 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1955

К. Б. ВЛАСОВ

АНИЗОТРОПИЯ ВОСПРИИМЧИВОСТИ И МАГНЕТОКАЛОРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Макроскопическое устойчивое магнитное состояние антиферромагнетика определяется минимумом его термодинамического потенциала, например свободной энергии. При вычислении той части свободной энергии, которая связана с магнитным состоянием антиферромагнетика, необходимо учитывать энергию антиферромагнетика во внешнем магнитном поле, энергию магнитного взаимодействия элементарных магнитных моментов и энергию обменного электростатического взаимодействия (см., например, [1]). Именно обменным взаимодействием обусловливается антипараллельная ориентация элементарных магнитных моментов.

Будем в дальнейшем рассматривать поведение антиферромагнетиков в интервале напряженностей магнитных полей, в котором энергия во внешнем магнитном поле гораздо меньше обменной энергии, но может превышать энергию магнитного взаимодействия элементарных магнитных моментов. В этом случае можно считать, что элементарные магнитные моменты, или, соответственно, векторы самопроизвольной намагниченности подрешеток *, остаются практически антипараллельными друг другу во всем интервале полей. Направление, в котором лежат эти векторы, будем задавать единичными векторами: $\mathbf{p}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\mathbf{p}_2(\mathbf{p}_2 \approx -\mathbf{p}_1)$; направление внешнего магнитного поля определим единичным вектором $\mathbf{h}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

1. Установим сначала зависимости, которые можно получить в этих предположениях из общих термодинамических соотношений.

Разложим вектор напряженности магнитного поля на две составляющие — параллельную и перпендикулярную к направлению магнитных моментов. Под действием этих составляющих возникнут параллельная и перпендикулярная слагающие намагниченности (парапроцесс):

$$I_{\parallel} = \chi_{\parallel} H \cos\psi$$

и

$$I_{\perp} = \chi_{\perp} H \sin\psi,$$

где $\chi_{\parallel}$ и $\chi_{\perp}$ — так называемые параллельная и перпендикулярная магнитные восприимчивости, которые в рассматриваемом интервале полей можно считать не зависящими от напряженности магнитного поля; ψ — острый угол между направлением поля и направлением магнитных моментов:

$$\cos\psi = (\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3.$$

При этом результирующее изменение намагниченности вдоль направления поля равно:

$$I = H(\chi_{\parallel} \cos^2\psi + \chi_{\perp} \sin^2\psi), \qquad (1)$$

* Как и в [1], будем полагать, что решетку антиферромагнетика в магнитном отношении можно разбить на две подрешетки, обладающие самопроизвольной намагниченностью.

восприимчивость:

$$\chi = \frac{I}{H} = \chi_{\parallel} \cos^2 \psi + \chi_{\perp} \sin^2 \psi \qquad (2)$$

и свободная энергия во внешнем магнитном поле:

$$F_M = -(\mathbf{I}\,\mathbf{H}) = -(\chi_{\parallel} \cos^2 \psi + \chi_{\perp} \sin^2 \psi) H^2 = H^2 (\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) \cos^2 \psi - \chi_{\perp} H^2. \qquad (3)$$

В силу магнитного взаимодействия между элементарными магнитными моментами свободная энергия антиферромагнетика зависит от ориентации магнитных моментов относительно кристаллографических осей. Из соображений симметрии эту часть свободной энергии, называемую свободной энергией кристаллографической магнитной анизотропии, в случае монокристаллов ромбической, тетрагональной, тригональной и гексагональной систем можно в первом приближении записать в виде:

$$F_K = -(K_x \cos^2 \alpha_1 + K_y \cos^2 \alpha_2 + K_z \cos^2 \alpha_3), \qquad (4)$$

где K_x, K_y и K_z — константы магнитной кристаллографической анизотропии. В монокристаллах тетрагональной, тригональной и гексагональной систем $K_y = K_z$.

Равновесные значения углов α_1, α_2 и α_3, а следовательно, и ψ находим из условий минимума общей свободной энергии $F = F_M + F_K$, которые с учетом добавочного условия $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
(\cos^2 \alpha_1 - 1) \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_1} + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_2} + \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_3} = 0, \\
\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_1} + (\cos^2 \alpha_2 - 1) \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_2} + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_3} = 0, \\
\cos \alpha_3 \cos \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_1} + \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_2} + (\cos^2 \alpha_3 - 1) \frac{\partial F}{\partial \cos \alpha_3} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Подставляя (3) и (4) в (5) и выбирая направления осей координат так, чтобы выполнялось условие $K_x > K_y > K_z$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
H_{0XY}^2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + H^2 \cos \psi (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) = 0, \\
H_{0XZ}^2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + H^2 \cos \psi (\cos \alpha_1 \cos \beta_3 - \cos \alpha_3 \cos \beta_1) = 0, \\
H_{0YZ}^2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + H^2 \cos \psi (\cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \alpha_3 \cos \beta_2) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где H_{0XY}, H_{0XZ} и H_{0YZ} — критические поля, равные:

$$H_{0XY}^2 = \frac{K_X - K_Y}{\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}} = \frac{K_1}{\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}}; \quad H_{0XZ}^2 = \frac{K_X - K_Z}{\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}} = \frac{K_2}{\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}};$$

$$H_{0YZ}^2 = \frac{K_Y - K_Z}{\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}} = \frac{K_3}{\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}}, \qquad (7)$$

причем

$$H_{0XZ}^2 = H_{0YZ}^2 + H_{0XY}^2.$$

Решения уравнений (6) проанализированы в работе [2] *. В рассматриваемом интервале полей условию минимума свободной энергии удо-

* Расчет в работе [2] произведен для температуры, равной абсолютному нулю, на основании метода молекулярного поля. В настоящем сообщении это ограничение не накладывается.

влетворяет одно решение, названное в [2] решением типа A. Это решение соответствует двум противоположно направленным векторам $\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}$, определяющим направление векторов самопроизвольной намагниченности подрешеток. При поле, равном нулю, магнитные моменты ориентированы вдоль оси X. По мере увеличения напряженности магнитного поля направление магнитных моментов стремится ориентироваться перпендикулярно к направлению поля (процесс вращения).

Если вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости XZ, то решение (6) имеет особенности, а именно, когда значения напряженности магнитного поля удовлетворяют уравнению гиперболы

$$\frac{H_X^2}{H_{0XY}^2} - \frac{H_Z^2}{H_{0YZ}^2} = 1, \tag{8}$$

магнитные моменты резко меняют свое направление и ориентируются вдоль оси Y. Если вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости XY, то осуществляющееся решение уравнений (6) имеет вид:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta - \dfrac{H^2}{H_{0XY}^2}}, \tag{9}$$

где β — острый угол между направлением вектора напряженности магнитного поля и осью X. Если вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости XZ, то ψ определяется формулой (9), где вместо H_{0XY}^2 следует подставить H_{0XZ}^2. Однако для этого случая формула (9) применима только вплоть до значений напряженности магнитного поля, удовлетворяющих уравнению гиперболы (8), когда $\left|\dfrac{H_Z}{H_X}\right| < \dfrac{H_{0YZ}}{H_{0XY}}$. Если вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости YZ, то магнитные моменты остаются в направлении X.

Для кристаллов тетрагональной, тригональной и гексагональной симметрии решение (9) справедливо для любого кристаллографического направления.

Уравнения (2) и (6), или в частном случае, когда поле лежит в плоскости XY, формула (9), вполне определяют анизотропию восприимчивости в антиферромагнитных монокристаллах и зависимость восприимчивости от поля. Анализ этих зависимостей для частного случая, когда $K_Y - K_Z = 0$, приведен в [1].

Рассчитаем на основании полученных соотношений изменение температуры, которое должно происходить при адиабатически-изохорическом намагничивании антиферромагнетика (магнетокалорический эффект).

Из термодинамических соотношений следует [3], что

$$\delta T = -\frac{T\left(\dfrac{\partial I}{\partial T}\right)_{H,V}}{C_{H,V}} dH = f(H, T)\, dH. \tag{10}$$

Переходя к конечным изменениям температуры при изменении напряженности магнитного поля от нуля до H, получим:

$$T = T_0 + \int_0^H f(H, T)\, dH. \tag{11}$$

Так как из одних термодинамических соображений мы не можем установить в общем случае явный вид температурной зависимости параметров $\chi_\parallel$, $\chi_\perp$, K, через которые выражается производная $\left(\dfrac{\partial I}{\partial T}\right)_{H,V}$,

и теплоемкости C_{HV}, то решить (11) в общем случае нельзя. Однако можно получить приближенное решение (11), используя метод последовательных приближений для случая, когда $\Delta T = T - T_0 \ll T_0$, который, как будет видно ниже, в исследуемом интервале полей и не в непосредственной близости к абсолютному нулю температур практически всегда выполняется. Рассмотрим случай, когда намагниченность определяется равенствами (1) и (9). В качестве нулевого приближения выбираем решение $T = T_0$. Подставляя (1) и (9) в (11), полагая, что в первом приближении теплоемкость C_H не зависит от напряженности магнитного поля H, переходя от интегрирования по H от нуля до H к интегрированию по ψ от β до ψ, получим в первом приближении для ΔT следующее выражение:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\cdot\frac{T_0}{C_H}\left[\frac{\partial\chi_\parallel}{\partial T}H_{0XY}^2\cos\beta\frac{\sin(\psi-\beta)}{\sin\psi}+\frac{\partial\chi_\perp}{\partial T}H_{0XY}^2\sin\beta\frac{\sin(\psi-\beta)}{\cos\psi}+\right.$$

$$\left.+H_{0XY}^4(\chi_\perp-\chi_\parallel)\frac{\partial\left(1/H_{0XY}^2\right)}{\partial T}\sin^2(\psi-\beta)\right], \qquad (12)$$

где C_H, $\frac{\partial\chi_\parallel}{\partial T}$, H_0, $\frac{\partial\chi_\perp}{\partial T}$, $(\chi_\perp-\chi_\parallel)$ и $\frac{\partial\left(1/H_{0XY}^2\right)}{\partial T}$ взяты в точке $T = T_0$.

От производной $\frac{\partial\left(1/H_{0XY}^2\right)}{\partial T}$ можно на основании (7) перейти к производной константы магнитной кристаллографической анизотропии по температуре. В этом случае вместо (12) получим:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{T}{C_H}[A(T)f_1(H)+B(T)f_2(H)+D(T)f_3(H)], \qquad (13)$$

где

$$A(T)=\frac{\partial\chi_\parallel}{\partial T}H_0^2,\quad B(T)=\frac{\partial\chi_\perp}{\partial T}H_0^2,\quad D(T)=-\frac{\partial K_1}{\partial T}; \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(H)&=\left[\cos\beta\frac{\sin(\psi-\beta)}{\sin\psi}-\sin^2(\psi-\beta)\right],\\ f_2(H)&=\left[\sin\beta\frac{\sin(\psi-\beta)}{\cos\psi}+\sin^2(\psi-\beta)\right],\\ f_3(H)&=\sin^2(\psi-\beta). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Эти формулы определяют зависимость изменения температуры, которое должно происходить при адиабатическом намагничивании антиферромагнетиков, от напряженности магнитного поля (если величины $A(T)$, $B(T)$ и $D(T)$ известны из других магнитных измерений) и от кристаллографического направления, вдоль которого это поле приложено (анизотропию магнетокалорического эффекта).

Проанализируем зависимость множителей $f_1(H)$, $f_2(H)$ и $f_3(H)$ от напряженности магнитного поля.

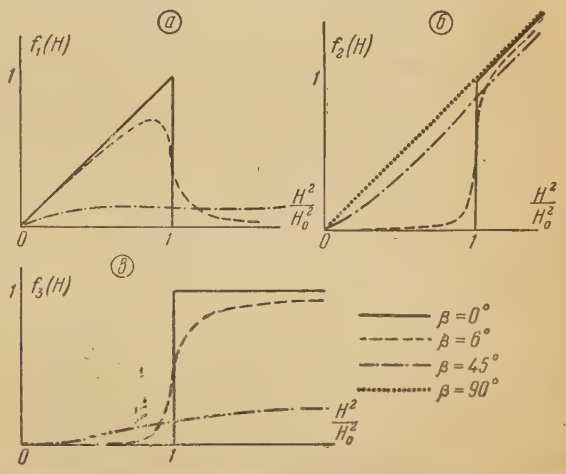
Пусть поле приложено вдоль естественного направления намагниченности подрешеток* ($\beta = 0$). В этом случае $f_1(H)$, $f_2(H)$ и $f_3(H)$ изменяются следующим образом: при $H < H_0$ множитель $f_1(H) = \frac{H^2}{H_0^2}$,

* Естественным направлением намагниченностей подрешеток мы будем называть кристаллографическое направление, вдоль которого ориентируются магнитные моменты (намагниченности) подрешеток в отсутствие внешнего магнитного поля. В работе [1] это направление называлось направлением преимущественного намагничивания.

при $H = H_0$ множитель $f_1(H)$ скачком уменьшается от единицы до нуля и при $H > H_0$ множитель $f_1(H) = 0$ (сплошная кривая на рисунке *а*). При $H < H_0$ $f_2(H) = 0$, при $H = H_0$ $f_2(H)$ скачком увеличивается от нуля до единицы и при $H > H_0$ $f_2(H) = \frac{H^2}{H_0^2}$ (сплошная кривая на рисунке *б*). При $H < H_0$ $f_3(H) = 0$, при $H = H_0$ $f_3(H)$ скачком увеличивается от нуля до единицы и при $H > H_0$ $f_3(H) = 1$ (сплошная кривая на рисунке *в*).

Пусть поле приложено перпендикулярно к естественному направлению намагниченности подрешеток ($\beta = 90°$). В этом случае во всем интервале полей: $f_1(H) = 0$; $f_2(H) = \frac{H^2}{H_0^2}$; $f_3(H) = 0$ (точечная кривая на рисунке *б*; на рисунках *а* и *в* эта кривая совпадает с осью абсцисс).

На рисунке приведен также ход зависимостей $f_1(H)$, $f_2(H)$ и $f_3(H)$ для случая, когда $\beta = 6°$ и $\beta = 45°$.



Зависимости множителей $f_1(H)$, $f_2(H)$ и $f_3(H)$, определяющих величину магнетокалорического эффекта, от относительных значений квадрата напряженности магнитного поля для различных ориентаций вектора напряженности магнитного поля по отношению к естественному направлению намагниченностей подрешеток. H_0 — критическое поле, $\beta°$ — острый угол между направлением вектора напряженности магнитного поля и естественным направлением намагниченностей подрешеток

Анализ зависимости изменения температуры, которое должно происходить при адиабатическом намагничивании, от поля позволит, таким образом, определить величины, а следовательно, если производить измерения при различных температурах, и температурные зависимости параметров H_0, $\frac{\partial \chi_\parallel}{\partial T}$, $\frac{\partial \chi_\perp}{\partial T}$ и K_1. Для этого, конечно, необходимо предварительно определить температурную зависимость теплоемкости C_H. Так, например, если откладывать на графике зависимость изменения температуры, обусловленного магнетокалорическим эффектом, от квадрата относительного значения напряженности магнитного поля $\frac{H^2}{H_0^2}$, то наклон прямой $\Delta T = \Delta T\left(\frac{H^2}{H_0^2}\right)$, снятой при $\beta = 0°$, в интервале полей $0 < H < H_0$ даст величину $\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{C_H} H_0 \frac{\partial \chi_\parallel}{\partial T}$. В интервале полей $H > H_0$ наклон этой прямой даст величину $\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{C_H} H_0 \frac{\partial \chi_\perp}{\partial T}$, и экстраполяция ее в точку $H=0$ даст величину $\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{C_H} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial T}$. Наклон прямой $\Delta T = \Delta T\left(\frac{H^2}{H_0^2}\right)$, снятой при $\beta = 90°$, даст величину $\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{C_H} H_0 \frac{\partial \chi_\perp}{\partial T}$.

2. Для того чтобы установить температурную зависимость изменения температуры, которое должно происходить при адиабатическом намагничивании, и теоретически оценить его величину, необходимо знать явный вид температурных зависимостей H_0, $\chi_\parallel$, $\chi_\perp$ и K_1. Для этого требуется произвести микроскопическое рассмотрение. Такой расчет был произве-

ден, например, в работе [1]. При этом рассматривалась следующая модель. Решетка антиферромагнетика в магнитном отношении разбивалась на две подрешетки, намагниченные при температурах ниже антиферромагнитной точки Кюри во взаимно противоположных направлениях. При вычислениях использовался метод энергетического центра тяжести, который, строго говоря, справедлив для температур, близких к точке Кюри и выше нее, и учитывалось диполь-дипольное магнитное взаимодействие. Было получено выражение для части свободной энергии антиферромагнетика, зависящей от магнитного состояния системы; из условий минимума которой можно определить зависимости (2), (4), (7) и (9)*, а также выражения для температурной зависимости параметров $\chi_{\parallel}$, $\chi_{\perp}$ и K_1:

$$\chi_{\parallel} = \frac{N\mu_0^2(1-y^2)}{kT_{\text{к}}\left[\tau + \frac{\theta}{T_{\text{к}}}(1-y^2)\right]}, \tag{16}$$

$$\chi_{\perp} = \frac{N\mu_0^2}{k(T_{\text{к}}+0)}, \tag{17}$$

$$K_1 = K_1(0)\,y^2, \tag{18}$$

где $\tau = \frac{T}{T_{\text{к}}}$ — температура, а y — намагниченность подрешеток, выраженные в относительных единицах, причем

$$y = \text{th}\frac{y}{\tau}, \tag{19}$$

$T_{\text{с}}$ — антиферромагнитная точка Кюри, выше которой исчезает антиферромагнетизм, θ — парамагнитная точка Кюри;

$$T_{\text{к}} = \frac{1}{k}[(P-Q)+(P'-Q')\cos^2(\psi-\beta)], \tag{20}$$

$$\theta = -\frac{1}{k}[(P+Q)+(P'+Q')\cos^2(\psi-\beta)], \tag{21}$$

где P и Q — суммы интегралов, характеризующих величину обменного электростатического, квази-классического и обменного магнитного взаимодействия, а P' и Q' — квази-классического и обменного магнитного взаимодействия электронов, относящихся соответственно к одной подрешетке и к двум подрешеткам.

Из (20) следует, что величина антиферромагнитной точки Кюри зависит от ориентации элементарных магнитных моментов по отношению к кристаллографическим осям (анизотропия точки Кюри). Максимальное различие точек Кюри, получающееся при этом, легко связать [1] с величиной критического поля при абсолютном нуле, т. е. $H_0(0)$, и перпендикулярной восприимчивостью:

$$\Delta T_{\text{к}\,max} = \frac{\chi_{\perp}H_0^2(0)}{R}, \tag{22}$$

где R — газовая постоянная.

При оценке величины магнетокалорического эффекта необходимо учитывать, что для опытных исследований зависимости восприимчивости,

* Эти зависимости получены для частного случая $K_y = K_z$. Однако, как нетрудно видеть, если при упомянутом расчете полагать, что решетка имеет не гексагональную или тетрагональную, а ромбическую симметрию, то получатся соотношения типа (4) и (7).

также изменения температуры, которое должно происходить при адиа-атическом намагничивании, от поля приходится брать антиферромаг-етики с низкой точкой Кюри (т. е. производить измерения при низких емпературах). Это происходит потому, что, как следует из (7) и (17), ритическое поле, вблизи которого должны наблюдаться наиболее ин-ересные эффекты, пропорционально точке Кюри. Не исключена воз-ожность, что существуют или могут быть получены антиферромагнетики, бладающие низкими значениями констант анизотропии. Эти антиферро-агнетики согласно (7) могут обладать относительно небольшими кри-ическими полями, даже если они имеют более высокие значения точек Кюри.

Наиболее полные экспериментальные данные имеются для монокри-таллов $CuCl_2.2H_2O$ [4] ($T_к = 4{,}3°$ К, $H_0(0) \approx 6500$ Ое). Будем произво-ить расчеты в дальнейшем применительно к этому веществу. В анти-ерромагнетиках со столь низкой точкой Кюри, как следует из теорети-еских соображений и подтверждается на опыте [4], теплоемкость опре-еляется в основном наличием антиферромагнитного упорядочения маг-итных моментов. Зная вид зависимости части свободной энергии от агнитного состояния антиферромагнетика [1], можно получить выра-ение для теплоемкости:

$$C_H = -\frac{R}{2} \cdot \frac{\partial y^2}{\partial \tau}. \qquad (23)$$

Подставляя (23), (14), (18) в (13), учитывая (7) и (22), а также то, что огласно (17) перпендикулярная восприимчивость не зависит от темпера-уры, получим для изменения температуры, которое должно происходить ри адиабатическом намагничивании, следующее выражение:

$$\Delta T = -\left[\tau \frac{A(T)}{D(T)} f_1(H) + \tau f_3(H)\right] \Delta T_{C_{max}}. \qquad (24)$$

Все входящие в (24) величины можно оценить на основании (14), (7), 16), (18) и (19). Оценка показывает, что по мере понижения температуры от точки Кюри множитель $\tau \frac{A(T)}{D(T)}$ должен возрастать (от единицы в точке Кюри до значений, например, 1,15 при $\tau = 0{,}8$ и 1,45 при $\tau = 0{,}5$). Та-ким образом, в случае, если теплоемкость в основном определяется магнит-ым состоянием антиферромагнетика, изменение температуры, вызванное ларапроцессом (первое слагаемое в (24)), с понижением температуры должно увеличиваться, а вызванное процессом вращения (второе слагаемое в (24)) — уменьшаться. При увеличении магнитного поля от нуля до H из-менение температуры от некоторой исходной температуры T, например в случае, когда направление поля совпадает с естественным направлением намагниченности подрешеток ($\beta = 0$), должно происходить следующим об-разом. При напряженности поля $H < H_0$ абсолютная величина изменения температуры пропорциональна H^2, при $H = H_0$ она достигает значения $\tau \frac{A(T)}{D(T)} \Delta T_{к_{max}}$, скачком уменьшается до величины $\tau \Delta T_{к_{max}}$ и остается равной этой величине при напряженностях поля $H > H_0$. Вдоль других кристал-лографических направлений это изменение температуры по абсолютной величине должно быть меньше, а зависимость от напряженности магнит-ного поля — более сложная (а именно, максимум изменения температу-ры должен быть менее острым).

Однако необходимо помнить, что расчет, основанный на использова-нии метода энергетического центра тяжести, может дать результаты, со-гласующиеся с опытными данными лишь в области точки Кюри, в отличие от расчета зависимости магнетокалорического эффекта от поля (см. (13)), который справедлив в более широком интервале температур (исключая область, близкую к абсолютному нулю). Так, например, сравнение темпе-ратурного хода теплоемкости, даваемого (23), и опытной зависимости [4]

показывает, что с понижением температуры теплоемкость падает более резко, чем это предсказывается (23). Кроме того, не исключена возможность, что константа кристаллографической магнитной анизотропии зависит от температуры более сложным образом, чем это предсказывается (18) (как это имеет место, например, в ферромагнетиках), так как при расчете было принято во внимание лишь диполь-дипольное магнитное взаимодействие. С уверенностью можно лишь заключить, что, в отличие от парамагнетиков, в антиферромагнетиках ниже антиферромагнитной точки Кюри при адиабатическом намагничивании следует ожидать охлаждения. Изменение температуры, которое при этом должно произойти, во-первых, определяется исходной температурой образца и, во-вторых, должно зависеть сложным образом как от величины магнитного поля, так и от его ориентации по отношению к кристаллографическим осям. О порядке величины изменения температуры, которого можно ждать на опыте в антиферромагнитной области температур, можно судить по данным [5] для максимального изменения точки Кюри (в зависимости от ориентации магнитных моментов по отношению к кристаллографическим осям) в $CuCl_2.2H_2O$, равного $\Delta T_{\kappa max} = 0{,}04°K$.

В заключение приношу благодарность С. В. Вонсовскому за обсуждение работы.

Институт физики металлов
Уральского филиала
Академии наук СССР

Цитированная литература

1. Власов К. Б., Изв. АН СССР, Серия физич., 18, *3*, 339 (1954).
2. Gorter C. J., Haatjes J., Physica, 18, 285 (1952).
3. Вонсовский С. В., Шур Я. С., Ферромагнетизм.— ГИТТЛ, М.— Л., 1948.
4. Gorter C. J., Rev. Mod. Phys., 25, 332 (1953).
5. Poulis N. J., Hardeman G. E. G., Physica, 18, 429 (1952).

Материалы
III Всесоюзного совещания
по физике космических лучей

(Москва, 15—23 декабря 1954 г.)

III Всесоюзное совещание по физике космических лучей состоялось 15—23 декабря 1954 г. в Москве. В программу совещания были включены доклады по следующим основным разделам:

1) взаимодействие с атомными ядрами частиц космических лучей с энергией порядка 10^{10} eV,
2) взаимодействие с нуклонами и атомными ядрами нуклонов и фотонов с энергией ниже 10^{9} eV,
3) вопросы теории процессов при высоких энергиях,
4) взаимодействие частиц при сверхвысоких энергиях,
5) новые частицы,
6) вариации и происхождение космических лучей.

Материалы Совещания в виде обработанных авторами текстов докладов публикуются в Известиях АН СССР, Серия физич., т. 19, № 5 (разделы 1—2), № 6 (разделы 3—5) 1955 г. и т. 20, № 1 (раздел 6) 1956 г. В тех случаях, когда не был представлен текст доклада, публикуется его краткое содержание (тезисы). В публикуемые материалы не включены тексты лекции Л. Д. Ландау «О множественном образовании частиц» и обзорного доклада А. О. Вайсенберга «Новые частицы».

В подборе материалов и подготовке их к изданию принимали участие М. И. Адамович (взаимодействие с веществом фотонов от синхротрона), Н.П. Богачев (взаимодействие с веществом частиц, полученных на синхрофазотроне), М. И. Дайон (новые частицы; работы, выполненные с применением магнитного масс-спектрометра, и методические работы), Л. И. Дорман (вариации интенсивности космических лучей), И. П. Иваненко (теоретические работы), В. С. Мурзин (работы, проведенные в стратосфере), Л. И. Сарычева (взаимодействия при сверхвысоких энергиях), М. И. Фрадкин (происхождение космических лучей).

Председатель Оргкомитета III Всесоюзного совещания
по физике космических лучей
чл.-корр. АН СССР *С. Н. Вернов*